Кулонов закон

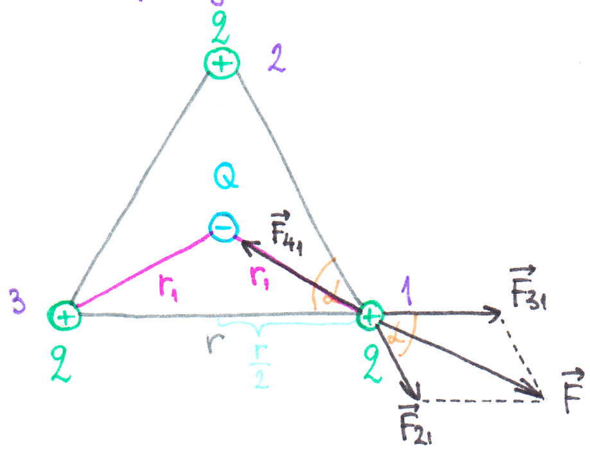
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\,\vec{r}_{12}$$

$\vec{F}_{12}$ – $\underbrace{\text{век. силе којом}}_{}$ наел. 1 делује на наел. 2

$\vec{r}_{12}$ – радијус вектор усмерен од 1 ка 2

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m}$ електрична конст. (апс. диелек. проп. вакуума)

1. Три једнака позитивна наелектрисања налазе се на теменима једнакостраничног троугла. Наелектрисање Q треба поставити у центар троугла и наћи његову величину под условом да је систем наелектрисања у равнотежи. Израчунати Q ако q износи 1,732 μC.



СИСТЕМ ЈЕ СИМЕТРИЧАН

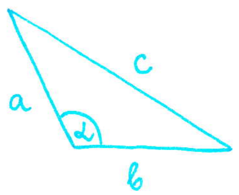
$\vec{F}_{21} \equiv \vec{F}_2 \qquad \vec{F}_{31} \equiv \vec{F}_3 \qquad \vec{F}_{41} \equiv \vec{F}_4$

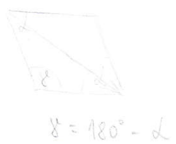
$\alpha = 60^\circ$ (Δ ЈЕ ЈЕДНАКОСТРАНИЧАН)

$$F_2 = F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{r^2}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

КОСИНУСНА ТЕОРЕМА





$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$F^2 = F_2^2 + F_3^2 - 2F_2F_3\underbrace{\cos(180^\circ - \alpha)}_{-\cos\alpha}$$

$$F^2 = F_2^2 + F_3^2 + 2F_2F_3\cos\alpha =$$

$$= 2F_2^2 + 2F_2^2\cos\alpha = 2F_2^2(1+\cos\alpha)$$

$$F = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$$

УСЛОВ РАВНОТЕЖЕ ЗА НАЕЛ. 1 ЈЕ ДА СВЕ СИЛЕ КОЈЕ ДЕЛУЈУ НА ЊЕГА ИМАЈУ АЛГЕБАРСКИ ЗБИР 0

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

$$\vec{F} + \vec{F}_4 = 0$$

$$\vec{F} \parallel \vec{F}_4 \quad \Rightarrow \quad F = F_4$$

$$F_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r_1^2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \sqrt{2(1+\cos\alpha)}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q \boxed{q}}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^{\boxed{2}}}{r^2} \sqrt{2(1+\cos\alpha)}$$

$$Q = \frac{r_1^2}{r^2} q \sqrt{2(1+\cos\alpha)}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{r}{2}}{r_1}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{r}{2r_1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{2r_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 q \sqrt{2(1+\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}})} =$$

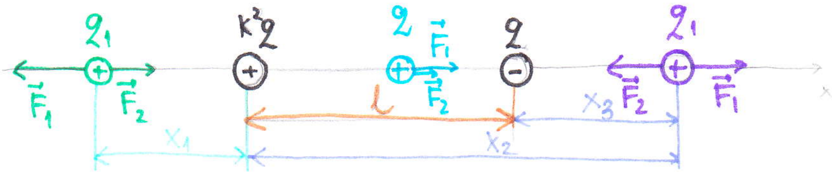
$$= \frac{1}{3} q \sqrt{3}$$

$$\boxed{Q = \frac{q}{\sqrt{3}}}$$

$$q = 1{,}732\,\mu C$$

$$Q = \frac{1{,}732\,\mu C}{\underbrace{\sqrt{3}}_{=1{,}732}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 1\,\mu C}$$

2. Два наел. $-q$ и k^2q $(k>1)$ утврђена су на растојању l једно од другог. Треће наел. q_1 могуће је премештати дуж праве која пролази кроз ова два наел. Одредити ону тачку на тој правој у којој ће q_1 бити у равнотежи. Где се налази та тачка ако је $k=4$, а $l=6cm$.



I случај:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 k^2 q}{x_1^2}$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q}{(l+x_1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} k>1 \Rightarrow k^2>1 \\ x_1 < l + x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{k}{x_1} > \frac{1}{l+x_1}$$

увек важи

$\Downarrow$

F_2 увек мање од F_1

II случај:

$\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$ (истог су смера) $\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq 0$

III случај:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{k^2 q q_1}{x_2^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{k^2 q q_1}{(l+x_3)^2}$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q_1}{x_3^2}$$

услов за равнотежу: $F_1 = F_2$

$$\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{k^2 \boxed{q q_1}}{(l+x_3)^2} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{\boxed{q q_1}}{x_3^2}$$

$$\frac{k^2}{(l+x_3)^2} = \frac{1}{x_3^2}$$

$$k x_3 = l + x_3$$

$$k x_3 - x_3 = l$$

$$x_3(k-1) = l$$

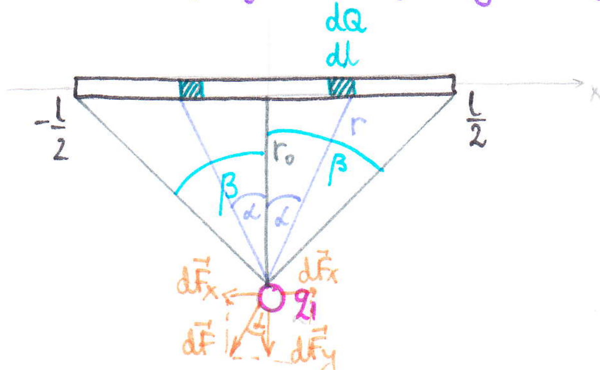
$$\boxed{x_3 = \frac{l}{k-1}}$$

$k=4 \quad l = 6\text{ cm}$

$$x_3 = \frac{6\text{ cm}}{4-1}$$

$$\boxed{x_3 = 2\text{ cm}}$$

3. Танки штап дужине l равномерно је наел. по целој дужини (линијска густина наел. је τ). На растојању r_0 од штапа се налази наел. q_1. Оно је подједнако удаљено од крајева штапа. Одредити силу узајамног дејства тачкастог наел. и штапа. Израчунати ту силу ако је $r_0 = 10\,cm$, $l = 20\,cm$, $q_1 = 10^{-9}\,C$ и $\tau = 5{,}5 \cdot 10^{-8}\frac{C}{m}$



$dQ = \tau\, dl$ НАЕЛ. ЕЛЕМЕНТА ШТАПА dl

(МОЖЕ СЕ СМАТРАТИ ДА ЈЕ ТО НАЕЛ. ТАЧКАСТО)

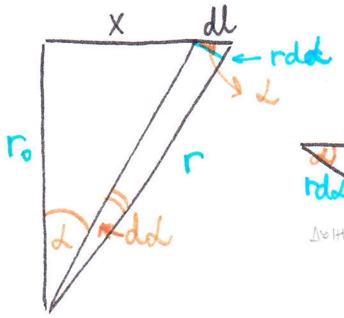
КУЛОНОВ ЗАКОН $\Rightarrow$ $dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ\, q_1}{r^2}$

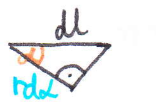
$$dF_x = dF \sin\alpha$$
$$dF_y = dF \cos\alpha$$

$F_x = \int dF_x = 0$ ЗБОГ СИМЕТРИЈЕ ОВА КОМПОНЕНТА СЕ НЕ УЗИМА У ОБЗИР

$$F = F_y = \int dF_y$$

$$dF_y = dF\cos\alpha =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ\, q_1}{r^2} \cos\alpha =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\tau\, dl\, q_1}{r^2} \cos\alpha$$





ДУЖИНА ЛУКА

$$\cos\alpha = \frac{r\,d\alpha}{dl}$$

$$dl = \frac{r\,d\alpha}{\cos\alpha}$$

$$dF_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\tau q_1}{r^2} \frac{r\,d\alpha}{\cos\alpha} \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{r_0}{r} \Rightarrow r = \frac{r_0}{\cos\alpha}$$

$$dF_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tau q_1 \frac{\cos\alpha}{r_0} d\alpha$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\tau q_1}{r_0} \int_{-\beta}^{\beta} \cos\alpha \, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\tau q_1}{r_0} \sin\alpha \Big|_{-\beta}^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\tau q_1}{r_0} \left(\sin\beta - \underbrace{\sin(-\beta)}_{-\sin\beta}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\tau q_1}{r_0} 2\sin\beta$$

$$\sin\beta = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{l}{2\sqrt{r_0^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\tau q_1}{r_0} 2 \frac{l}{2\sqrt{r_0^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\tau q_1}{r_0} \frac{l}{(r_0^2 + (l/2)^2)^{1/2}}}$$

ЗАЗ ПОКАЗАТИ ДА ЈЕ $F_x = 0$

$r_0 = 10\,cm \quad l = 20\,cm \quad q_1 = 10^{-9}\,C \quad \tau = 5{,}5 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m}$

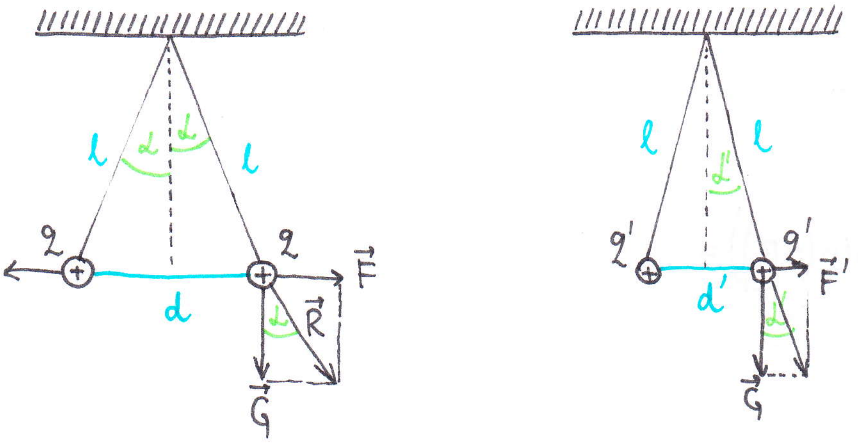
$$F = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}} \frac{5{,}5 \cdot 10^{-8} \frac{C}{m} \; 10^{-9}\,C}{10 \cdot 10^{-2}\,m} \frac{20 \cdot 10^{-2}\,m}{((10 \cdot 10^{-2}\,m)^2 + (10 \cdot 10^{-2}\,m)^2)^{1/2}}$$

$$[F] = \frac{[C]}{[V]} \qquad [V] = \frac{[J]}{[C]} \qquad [J] = [N] \cdot [m]$$

$$F = 3{,}595 \cdot 10^{10} \frac{m}{F} \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-18} \frac{C^2}{m} \cdot 35{,}36 \frac{1}{m} =$$

$$= 6{,}99 \cdot 10^{-6} \frac{C^2}{F \cdot m} \approx 7 \cdot 10^{-6} \frac{C^2}{\frac{C}{V} m} = 7 \cdot 10^{-6} \frac{C \frac{J}{C}}{m} = 7 \cdot 10^{-6} \frac{N \cdot m}{m} = \boxed{7\,\mu N}$$

4. Две мале проводне куглице обешене су дугачким непроводним нитима о исту тачку. Куглице су оптерећене истом количином оптерећења (наелектрисања) q. Дужина нити је l, а растојање између куглица d. Наћи ново равнотежно растојање d' које настаје када се наелектрисања куглица преполове. Израчунати d' ако је $d = 1\,\text{cm}$.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{G} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{F}{R}}{\frac{G}{R}} = \frac{F}{G}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{l}$$

$$\frac{F}{G} = \frac{d}{2l} \qquad (1)$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{d^2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{F'}{G} = \frac{d'}{2l} \qquad (2)$$

$$F' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q'^2}{d'^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{d'^2}$$

$$F' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q'^2}{4d'^2}$$

$$\left.\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \quad F = G\,\frac{d}{2l} \\ (2) &\Rightarrow \quad F' = G\,\frac{d'}{2l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{F}{F'} = \frac{\frac{Gd}{2l}}{\frac{Gd'}{2l}} = \frac{d}{d'} \qquad (3)$$

$$\frac{F}{F'} = \frac{\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q^2}{d^2}}{\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q^2}{4d'^2}} = \frac{4d'^2}{d^2}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{d}{d'} = \frac{4d'^2}{d^2}$$

$$d^3 = 4d'^3$$

$$d' = \left(\frac{d^3}{4}\right)^{1/3}$$

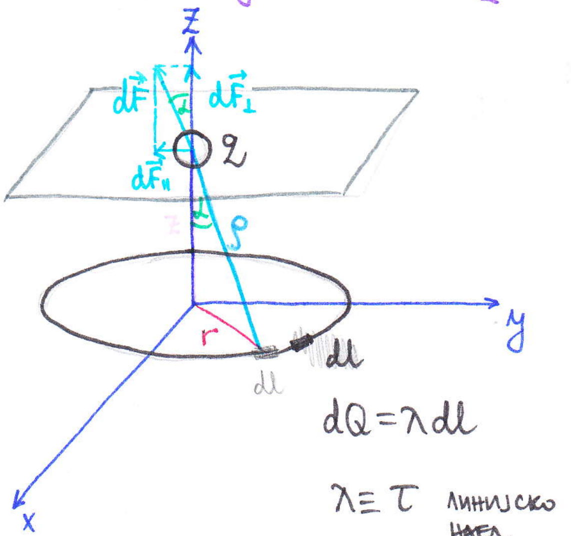
$$\boxed{d' = \frac{d}{\sqrt[3]{4}}}$$

$$d = 1\text{ cm} \Rightarrow \boxed{d' = \frac{10^{-2}\text{ m}}{1{,}587} = 0{,}63 \cdot 10^{-2}\text{ m}}$$

5. Кружница полупречника r равномерно је наел. укупном количином наел. Q. Кружница лежи у xy равни, при чему се центар кружнице поклапа са координатним почетком.

а) Коликом силом кружница делује на тачкасто наел. које је смештено негде на z-оси?

б) На ком месту је та сила максимална? Одредити максималну вредност силе ако је $Q = 1\text{mC}$, $q = 1\text{nC}$ и $r = 0{,}62$ m.



$$dQ = \lambda\, dl$$

$\lambda \equiv \tau$ ЛИНИЈСКО НАЕЛ.
(НАЕЛ. ПО ЈЕДИНИЦИ ДУЖИНЕ)

$$\frac{Q}{2\pi r} = \lambda$$

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\, dQ}{\rho^2}$$

ПАРАЛЕЛНЕ КОМПОНЕНТЕ СЕ ПОНИШТАВАЈУ

$$dF_\perp = dF \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{\rho}$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$dF_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\lambda\, dl}{r^2+z^2} \frac{z}{\rho} =$$

$$= \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, dl$$

$$F_\perp = \int dF_\perp =$$

$$= \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} dl =$$

$$= \frac{q\boxed{\lambda}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \boxed{2\pi r} \qquad Q$$

$$\boxed{F_\perp = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}} = f(z)$$

б) $(F_\perp)_{max} = ?$

$$\frac{dF_\perp}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z_{max}$$

извод количника

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a' \cdot b - a \cdot b'}{b^2}$$

$$\frac{dF_\perp}{dz} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(r^2+z^2)^{3/2} - z\,(r^2+z^2)^{1/2}\,\frac{3}{2}\,2z}{(r^2+z^2)^3} = 0$$

$$(r^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(r^2+z^2)^{1/2} = 0 \quad / : (r^2+z^2)^{1/2}$$

$$r^2 + z^2 - 3z^2 = 0$$

$$2z^2 = r^2$$

$$z^2 = \frac{r^2}{2} \qquad \boxed{z_{max} = \pm\frac{r}{\sqrt{2}} = \pm\frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

$$(F_\perp)_{max} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z_{max}}{(r^2+z_{max}^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\sqrt{2}}{2\left(r^2+\frac{r^2}{2}\right)^{3/2}} =$$

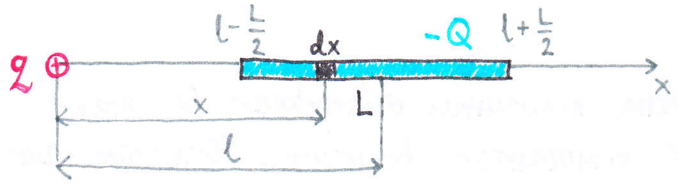
$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\sqrt{2}}{2\left(\frac{3r^2}{2}\right)^{3/2}} =$$

$$\left(\frac{3r^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3^{\frac{3}{2}}r^3}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{2}}\frac{3^{3/2}}{2^{3/2}}} = \frac{2^{1/2}}{2^{\frac{2}{2}-\frac{3}{2}}\cdot 3^{3/2}} = \frac{2^{1/2}}{2^{-\frac{1}{2}}3^{3/2}} = \frac{2^{1/2}2^{1/2}}{3^{3/2}} = \boxed{\frac{\overset{1,41}{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{3}}} = 1,44$$

$$= \frac{10^{-9}C\cdot 10^{-6}C}{4\cdot 3,14\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\frac{F}{m}}\frac{2\cdot 0,62m}{\sqrt[3]{3}} = 7,73\cdot 10^{-6}N$$

6. По танком штапу дужине L равномерно је распоређено наел. Q. Тачкасто наел. q супротног знака налази се на правцу на ком лежи и штап, а удаљено је од средине штапа за дужину l.
а) Наћи силу привлачења између штапа и тачкастог наел.
б) Колико се ова сила разликује од силе интеракције q и Q, уколико је сада Q тачкасто наел. смештено на средину штапа? Сматрати да је $l \gg \frac{L}{2}$.



$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dQ}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\lambda\,dx}{x^2}$$

$$F = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l-\frac{L}{2}}^{l+\frac{L}{2}}\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{l-\frac{L}{2}}^{l+\frac{L}{2}} =$$

$$= \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l-\frac{L}{2}} - \frac{1}{l+\frac{L}{2}}\right) = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l+\frac{L}{2}-l+\frac{L}{2}}{l^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{l^2-\frac{L^2}{4}}$$

$$\boxed{F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left(l^2 - \frac{L^2}{4}\right)}}$$

б) $l \gg \frac{L}{2}$

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{1}{l^2\left(1 - \frac{L^2}{4l^2}\right)} =$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left(1 - \frac{L^2}{4l^2}\right)^{-1} =$$

РАЗВОЈ БИНОМНЕ СТЕПЕНЕ ФЈЕ

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \quad , \; x \ll 1$$

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left(1 + \frac{L^2}{4l^2}\right)$$

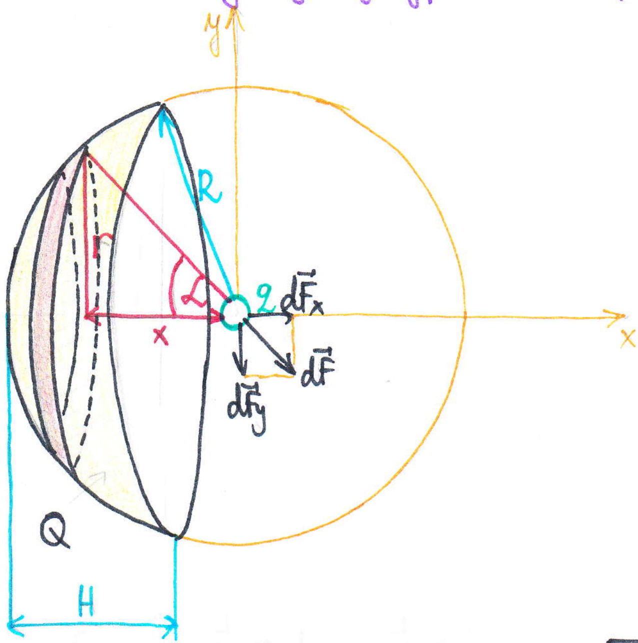
$$F = \underbrace{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 l^2}} + \boxed{\frac{1}{4}\ \frac{qQL^2}{4\pi\varepsilon_0 l^4}}$$

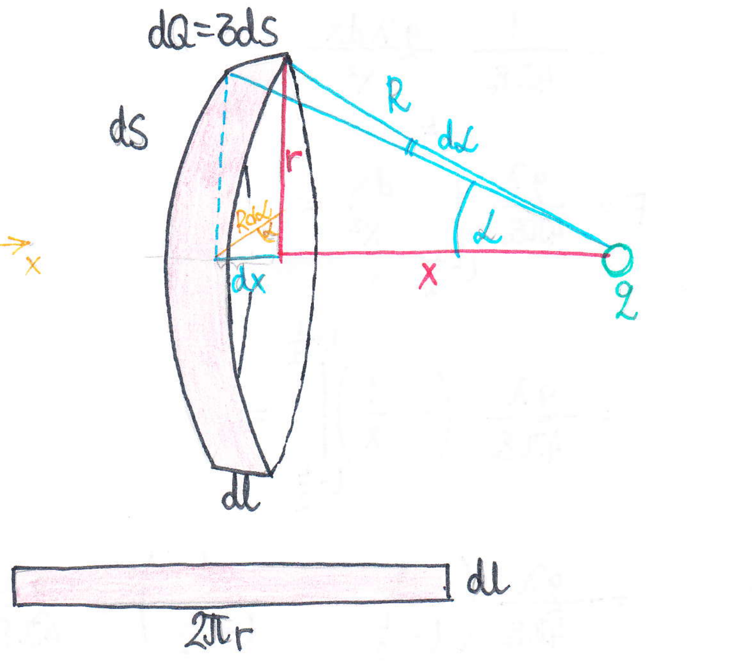
ЗА ТОЛИКО СЕ ДОБИЈЕНА СИЛА РАЗЛИКУЈЕ ОД СИЛЕ ИНТЕРАКЦИЈЕ НАЕЛ. q И Q НА РАСТ. l

ОПИСУЈЕ ИНТЕРАКЦИЈУ ТАЧКАСТИХ НАЕЛ. q И Q НА РАСТОЈАЊУ l

КОРЕКЦИЈА НА КОНАЧНОСТ ПРОТЕЗАЊА НАЕЛ.

7. Калота висине H равномерно је оптерећена количином оптерећења Q тако да је површинска густина оптерећења σ константна величина. Тачкасто оптерећење q се налази у тачки O која је центар сфере, чији је део посматрана калота. Нађи силу која делује на оптерећење q.





$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dQ}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\sigma\,dS}{R^2}$$

$$\left.\begin{aligned} dS &= 2\pi r\,dl \\ dl &= R\,d\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow dS = 2\pi r R\,d\alpha$$

$$\frac{dx}{R\,d\alpha} = \sin\alpha$$

$$R\,d\alpha = \frac{dx}{\sin\alpha}$$

$$dS = 2\pi r\frac{dx}{\sin\alpha}$$

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\sigma\,2\pi r\,dx}{R^2\sin\alpha}$$

РЕЗУЛТУЈУЋА СИЛА ЋЕ БИТИ УСМЕРЕНА САМО ДУЖ X-ОСЕ

$$dF_x = dF\cos\alpha =$$

$$= \frac{q\sigma r\,dx}{2\varepsilon_0 R^2\sin\alpha}\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{R} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{R}$$

$$dF_x = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\,dx}{R^2\,\frac{r}{R}}\,\frac{x}{R}$$

$$dF_x = \frac{q\sigma\,x\,dx}{2\varepsilon_0 R^2}$$

$$\boxed{F_x} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 R^2}\int_{-R}^{-R+H} x\,dx = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 R^2}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-R}^{-R+H} = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0 R^2}\left((-R+H)^2-(-R)^2\right) = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0 R^2}\left(R^2-2RH+H^2-R^2\right) =$$

$$= \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\left(\frac{H^2}{R^2}-2\frac{H}{R}+1-1\right) = \boxed{\frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\left(\left(\frac{H}{R}-1\right)^2-1\right)}$$

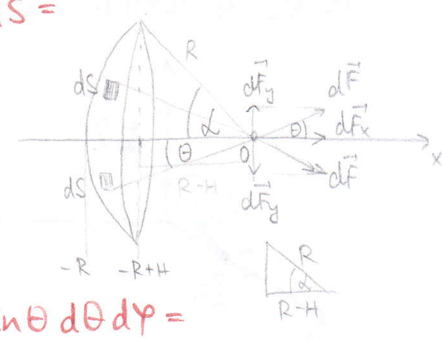
II НАЧИН:

$$dF_x = dF\cos\theta \qquad dF_y = dF\sin\theta\ ; \qquad F_y = 0$$

dS у правцу $-x$

$$-F = \iint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\sigma}{R^2}\cos\theta\,dS =$$

$$= \frac{q\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\iint_S \cos\theta\,dS$$



$$dS = R^2\sin\theta\,d\varphi$$

$$-F = \frac{q\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \frac{q\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \qquad \left[d(\sin\theta) = \cos\theta\,d\theta\right]$$

$$= \frac{q\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\,2\pi\int_0^{\alpha}\sin\theta\,d(\sin\theta) =$$

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{R-H}{R}\right)^2$$

$$= \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\sin^2\alpha}{2} =$$

$$= \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\sin^2\alpha = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\left(1-\left(\frac{R-H}{R}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\left(1-\frac{R^2-2HR+H^2}{R^2}\right) =$$

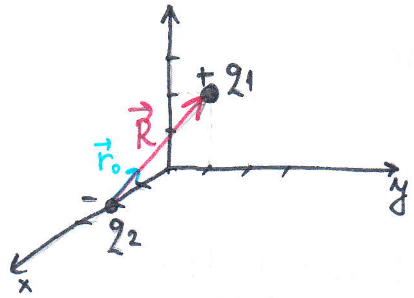
$$= \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\left(1-1+\frac{2H}{R}-\frac{H^2}{R^2}\right) =$$

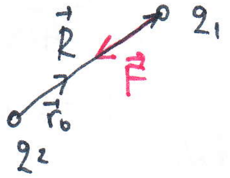
$$= \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\left(-\left(\frac{H^2}{R^2}-\frac{2H}{R}+1\right)+1\right) =$$

$$= \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\left(-\left(\frac{H}{R}-1\right)^2+1\right) = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\left(1-\left(\frac{H}{R}-1\right)^2\right)$$

$$\boxed{F = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\left(\left(\frac{H}{R}-1\right)^2-1\right)}$$

8. Наћи силу којом $q_2 = -300\,\mu C$ делује на наел. $q_1 = 20\,\mu C$, ако је q_1 смештено у тачки $(0,1,2)$, а q_2 у тачки $(2,0,0)$ (изражено у метрима).





$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{R^2}\,\vec{r}_0$$

$$\vec{R} = (0-2)\vec{e}_x + (1-0)\vec{e}_y + (2-0)\vec{e}_z =$$

$$= -2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{-2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z}{3}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}}\;\frac{20 \cdot 10^{-6}C \cdot (-300 \cdot 10^{-6}C)}{9\,m} \cdot \frac{1}{3}(-2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z) =$$

$$= -5{,}99\,\frac{-2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z}{3}\,N \qquad \vec{F} \approx -6\,\vec{r}_0$$

$$\vec{F} = -2(-2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z)N = (4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y - 4\vec{e}_z)N$$

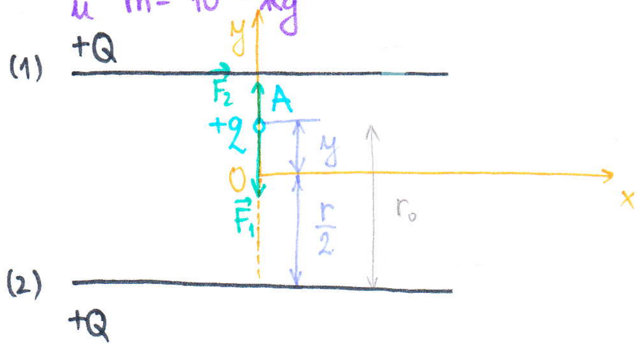
$$|\vec{F}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6N$$

9. Две дужи, свака дужине L, равномерно су наел. количином наел. +Q. Дужи су паралелне, на међусобном растојању r. У тачки A се налази оптерећење +q.

а) наћи силу која делује на +q (сматрати да је $r \ll L$)

б) ако тачкасти објекат у тачки A, поред тога што је наел., има и неку масу m, наћи кружну учестаност линеарних осцилација дуж y-осе у околини тачке O

в) израчунати ту кружну учестаност ако је $q = 10^{-6}\,C$, $\frac{Q}{L} = 10^{-5}\,\frac{C}{m}$, $r = 10^{-1}\,m$ и $m = 10^{-4}\,kg$



РЕШЕЊЕ 3. ЗАДАТКА:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\tau q_1}{r_0}\,\frac{l}{\sqrt{r_0^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}} \qquad \tau = \frac{Q}{L}$$

ЈЕДАН ПРОВОДНИК И ЈЕДНО НАЕЛ.

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\frac{Q}{L}q}{\frac{r}{2}-y}\,\frac{L}{\sqrt{\left(\frac{r}{2}-y\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\frac{Q}{L}q}{\frac{r}{2}+y}\,\frac{L}{\sqrt{\left(\frac{r}{2}+y\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad F = F_2 - F_1$$

$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\frac{r}{2}+y}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{2}+y\right)^2+\frac{L^2}{4}}} - \frac{1}{\frac{r}{2}-y}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{2}-y\right)^2+\frac{L^2}{4}}}\right] =$$

$$= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\frac{1}{\left(\frac{r}{2}+y\right)\sqrt{\underbrace{\frac{\left(\frac{r}{2}+y\right)^2}{L^2}}_{\to 0}+\frac{1}{4}}} - \frac{1}{\left(\frac{r}{2}-y\right)\sqrt{\underbrace{\frac{\left(\frac{r}{2}-y\right)^2}{L^2}}_{\to 0}+\frac{1}{4}}}\right]$$

$r \ll L$

$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\frac{1}{\left(\frac{r}{2}+y\right)\frac{1}{2}} - \frac{1}{\left(\frac{r}{2}-y\right)\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \frac{\frac{r}{2} - y - \frac{r}{2} - y}{\left(\frac{r}{2}+y\right)\left(\frac{r}{2}-y\right)} =$$

$$= \frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \frac{-2y}{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - y^2} =$$

$$= -\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 L} \cdot \frac{y}{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - y^2}$$

$$\boxed{F = -\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 L} \cdot \frac{y}{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - y^2}}$$

б) АКО ЈЕ РАСТОЈАЊЕ ОД РАВНОТЕЖНОГ ПОЛОЖАЈА МАЛО $y \to 0$ НЕ ЗНАМ БАШ ДА ЛИ $y \to 0$
ТАЧКАСТИ ОБЈЕКАТ ОСЦИЛУЈЕ ОКО ТАЧКЕ O
ЗБИРКА: $y^2 \ll \left(\frac{r}{2}\right)^2$ (ТРАЖЕ СЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ У ОКОЛИНИ ТАЧКЕ O)

$$F = -\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 L} \cdot \frac{y}{\left(\frac{r^2}{2}\right) - y^2} =$$

$$= -\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 L} \cdot \frac{y}{\frac{r^2}{4}}$$

$$F = -\frac{4Qq}{\pi\varepsilon_0 L r^2}\, y \qquad F = -kx$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4Qq}{\pi\varepsilon_0 L r^2}\, y$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{4Qq}{\pi\varepsilon_0 L r^2}\, y = 0 \;/ :m$$ ЈНА ОСЦИЛАТОРНОГ КРЕТАЊА

$$\frac{dy^2}{dt^2} + \frac{4Qq}{\pi\varepsilon_0 L r^2 m}\, y = 0$$

$$\frac{dy^2}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad \text{ЈНА ХАРМОНИЈСКОГ ОСЦИЛАТОРА}$$

$$\omega^2 = \frac{4Qq}{\pi\varepsilon_0 L r^2 m}$$

$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$

$y = y_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

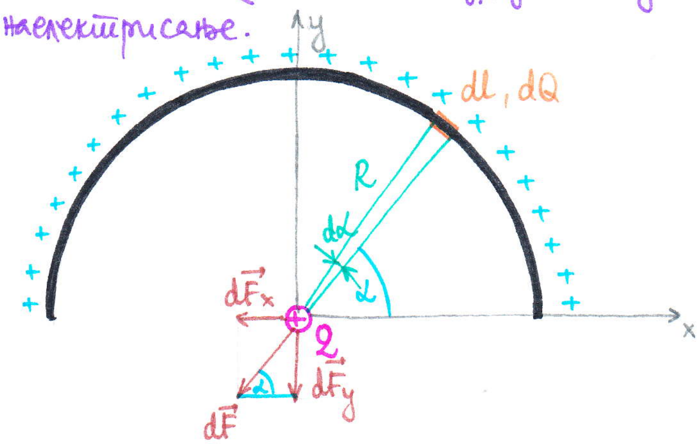
$$\boxed{\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 L m}}}$$

б) $q = 10^{-6}\,C$, $\frac{Q}{L} = 10^{-5}\,\frac{C}{m}$, $r = 10^{-1}\,m$, $m = 10^{-4}\,kg$

$$\omega = \frac{2}{10^{-1}\,m}\sqrt{\frac{10^{-5}\,\frac{C}{m}\cdot 10^{-6}\,C}{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}\cdot 10^{-4}\,kg}}$$

$$\boxed{\omega = 1{,}2\cdot 10^{-3}\,Hz}$$

10. Танка нит равномерно је насл. линијском густином насл. $\lambda = 10^{-4}\,\frac{C}{m}$, и савијена у полупрстен радијуса $R = 0{,}1\,m$. У средишту закривљености прстена се налази насл. $q = 10^{-9}\,C$. Одредити Кулонову силу којом нит делује на ово наелектрисање.



НЕМА СИЛЕ ДУЖ X-ОСЕ

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^3}\,\vec{r} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\vec{r}_0$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$F = F_y$$

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \frac{q\,dQ}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \frac{q\lambda\,dl}{R^2} \qquad\qquad dl = R\,d\alpha$$

$$dF = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \quad \frac{R\,d\alpha}{R^2} =$$

$$= \frac{q\lambda\,d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dF_y = dF \sin\alpha$$

$$F_y = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_0^{\pi} \sin\alpha\,d\alpha =$$

$$= \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (-\cos 0 + \cos\pi)$$

$$\boxed{F_R = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}}$$

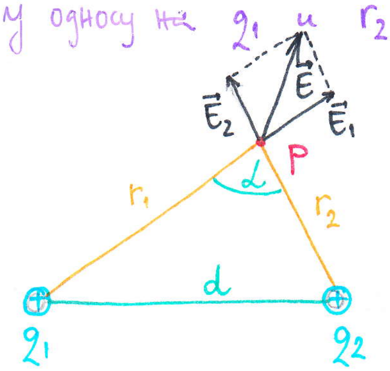
$$F_R = 1{,}8 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}$$

Јачина електричног поља

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^3}\,\vec{r} \qquad \left[\frac{V}{m}\right] \qquad \vec{F} = q\vec{E}$$

принцип суперпозиције: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_k = \sum_k E_k$ у тачки

11. Дата су два позитивна тачкаста наел. q_1 и q_2. Растојање међу њима је d. Наћи вектор јачине електричног поља у тачки P која је на удаљености r_1 у односу на q_1 и r_2 у односу на q_2.



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \underbrace{\cos \sphericalangle(\vec{E}_1, \vec{E}_2)}_{\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha}$$

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha$$

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1}{r_1^2} \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_2}{r_2^2} \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k_e = 8{,}99\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \approx 9\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}$$

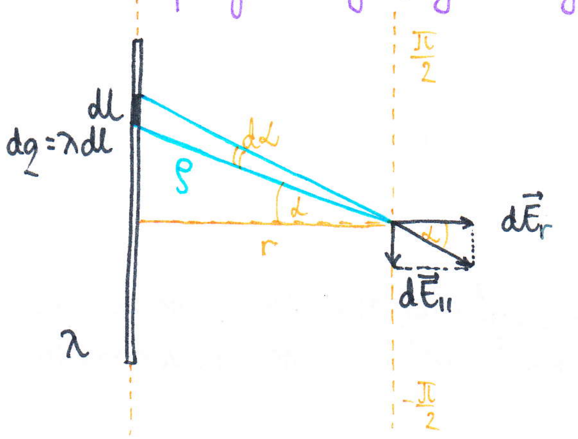
$$E^2 = \left(k_e\frac{q_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(k_e\frac{q_2}{r_2^2}\right)^2 + 2k_e^2\,\frac{q_1q_2}{r_1r_2}\,\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2} =$$

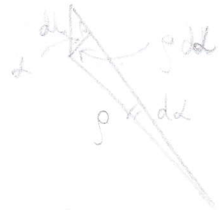
$$= k_e^2\left[\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + \frac{q_1q_2}{r_1^2r_2^2}\left(r_1^2+r_2^2-d^2\right)\right]$$

зад $r_1 = 3cm$ $r_2 = 1cm$ $d = \sqrt{7}\,cm$ $q_1 = 10^{-10}C$ $q_2 = 5\cdot10^{-10}C$

$E = 4{,}55\cdot10^4\,\frac{V}{m}$

12. Веома дуг, прав, танак проводник равномерно је наел. оптерећењем линијске густине λ. Израчунати јачину ЕП ~~у околини овог проводника~~, у тачки подједнако удаљеној од крајева проводника и која се налази на раст. r, на растојању r од проводника.





Вилосав 1.9

$$dE = k_e \frac{dq}{\rho^2} = k_e \frac{\lambda dl}{\rho^2}$$

$$dE_r = dE\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{r}{\rho} \qquad \rho = \frac{r}{\cos\alpha}$$

$$dE_r = k_e \frac{\lambda dl}{\rho^2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\rho d\alpha}{dl} \qquad dl = \frac{\rho d\alpha}{\cos\alpha}$$

$$dE_r = k_e \frac{\lambda \frac{\rho d\alpha}{\cos\alpha}}{\rho^2}\cos\alpha =$$

$$= k_e\lambda \frac{d\alpha}{\rho} =$$

$$= k_e\lambda \frac{d\alpha}{\frac{r}{\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{k_e\lambda}{r}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$E_r = \int dE_r =$$

$$= \frac{k_e\lambda}{r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\, d\alpha =$$

$$= \frac{k_e\lambda}{r}\, 2\sin\alpha \Big|_0^{\pi/2} =$$

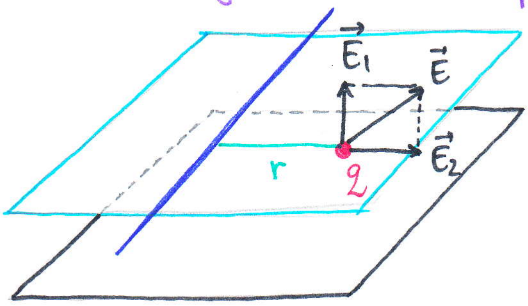
$$= \frac{k_e\lambda}{r}\, 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) =$$

$$= \frac{2k_e\lambda}{r}$$

$$\boxed{E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

ОДГОВАРА СЛУЧАЈУ $r \ll l$ $(l \to \infty)$

13. Изнад бесконачне хомогено наел. равни (површинска густина наел. σ) налази се тачкасто наел. q. На растојању r од тачкастог наел. се налази права бесконачно наел. нит (линијска густина наел. λ) која заједно са наел. q лежи у равни паралелној датој наел. равни. Одредити растојање r тако да резултантно ЕП заклапа угао α са равни и израчунати интензитет јачине ЕП за то r, ако је $\lambda = 3{,}14 \cdot 10^{-8}\,\frac{C}{m}$, $\sigma = 10^{-8}\,\frac{C}{m^2}$ и $\alpha = 45^\circ$.



$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ ЕП од равни

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$ ЕП од нити

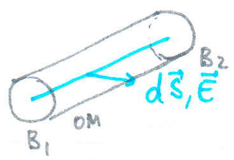
ТЕОРЕМА ГАУСА И ОСТРОГРАДСКОГ: $N = \int_S D_n\, dS = q$ ФЛУКС ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОМЕРАЈА

РАВАН: $N = 2SD = q = S\sigma$

$$2D = \sigma$$

$$D = \frac{\sigma}{2} \qquad D = \varepsilon_0 E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

ЛУЊ: $N = \int_{OM} D_n\, dS + \int_{B_1} D_n\, dS + \int_{B_2} D_n\, dS = q = \frac{\lambda}{l}$



$$D\, 2r\pi = \frac{\lambda}{l}$$

$$E = \frac{\lambda}{2r\pi\varepsilon_0 l}, \quad l = 1 \text{ (ЈЕДИНИЧНА ДУЖИНА)} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\sigma}{\boxed{2}\varepsilon_0}}{\frac{\lambda}{\boxed{2}\pi\varepsilon_0 r}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma \pi r}{\lambda}$$

$$\boxed{r = \frac{\operatorname{tg}\alpha \, \lambda}{\sigma \pi}} \quad \Rightarrow \quad E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma\pi}{\operatorname{tg}\alpha\,\lambda} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \operatorname{tg}\alpha}$$

$$E = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \operatorname{tg}\alpha}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{1 + \frac{1}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} =$$

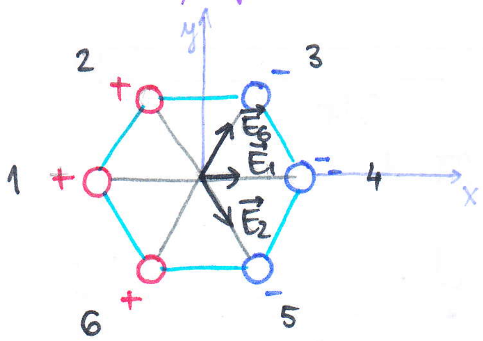
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \sin\alpha} \qquad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \sin\alpha}}$$

$$E = \frac{10^{-8}\,\frac{C}{m}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \cdot \sin 45^\circ} = 800\,\frac{V}{m}$$

$r = 1\,m$

14. Нађи јачину ЕП у центру шестоугаоника странице a ако су насл. q, три позитивна, три негативна, распоређена по теменима као на слици.



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{6} \vec{E}_i$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{a^2}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2x} + \vec{E}_{2y}$$

$$E_{2x} = E_2 \cos\alpha = \frac{1}{2} E_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{a^2} =$$

$$= \frac{1}{2} E_1$$

СВЕ y КОМПОНЕНТЕ СЕ ПОНИШТАВАЈУ $\Rightarrow$ РЕЗУЛТУЈУЋЕ ПОЉЕ ЋЕ БИТИ ДУЖ x-ОСЕ

$-E_{2y} = E_{6y}$

$$E_{6x} = E_{2x} = \frac{1}{2} E_1$$

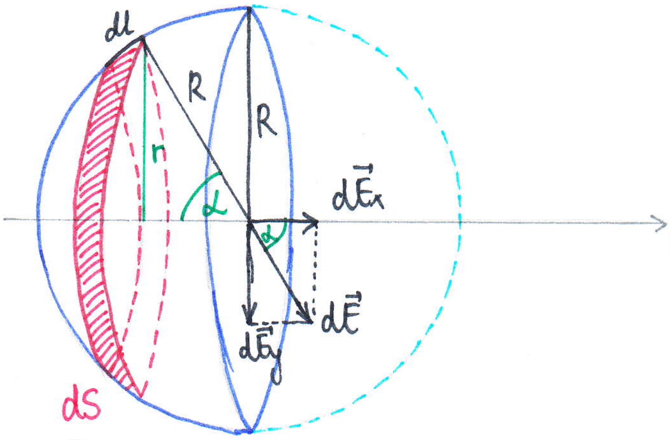
$$E_+ = E_1 + E_{2x} + E_{6x} = 2E_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$E_- = E_4 + E_{3x} + E_{5x} =$$

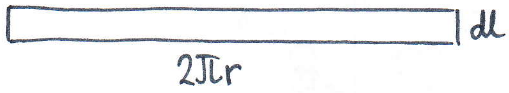
$$= E_1 + E_{6x} + E_{2x} = 2E_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$\boxed{E = E_+ + E_- = 4E_1 = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^2}}$$

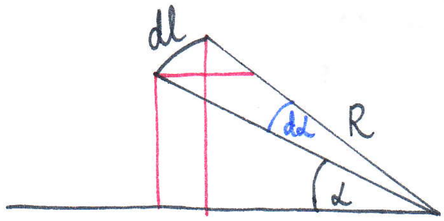
15. Израчунати јачину ЕП у центру полусфере равномерно површински наел. густином наел. σ. Радијус полусфере је R.



$dQ = \sigma dS$



$dS = 2\pi r\, dl$



$\sin\alpha = \frac{r}{R}$

$r = R\sin\alpha$

$$\left.\begin{aligned} dS &= 2\pi r\, dl \\ dl &= R\, d\alpha \end{aligned}\right\} dS = 2\pi r R\, d\alpha$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{R^2}$$

$$dE_x = dE\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{R^2}\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{\underset{2}{\boxed{4\pi}}\varepsilon_0}\frac{\sigma\,\boxed{2\pi}\, r\,\boxed{R}\, d\alpha}{R^{\boxed{2}}}\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\sigma\,\boxed{R}\sin\alpha\, d\alpha}{\boxed{R}}\cos\alpha =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha$$

СМЕНА: $\sin\alpha = t$ $\quad \sin 0 = 0 \Rightarrow t = 0$

$\cos\alpha\, d\alpha = dt$ $\quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow t = 1$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^1 t\, dt =$$

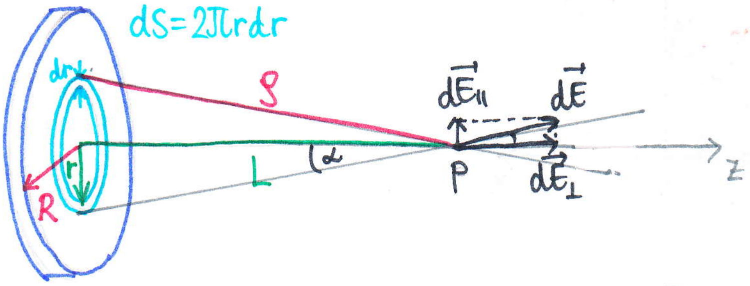
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}}$$

ЈАЧИНА ЕП ПОЛОВИНЕ СФЕРЕ У ЊЕНОМ ЦЕНТРУ

ЗА ЦЕЛУ СФЕРУ БИ ГРАНИЦЕ ИНТЕГРАЛА БИЛЕ ОД 0 ДО π $\Rightarrow$ $E = 0$ (СВЕ КОМПОНЕНТЕ СЕ ПОНИШТАВАЈУ)

16. Округла плоча полупречника R је наел. равномерно површинском густином наел. σ. Колика је јачина ЕП у тачки P која се налази на нормали кроз центар плоче на удаљености L од центра?



$$dE_\perp = dE\cos\alpha$$
$$dE_\parallel = dE\sin\alpha \qquad E_\parallel = 0$$

$$dE_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{\rho^2}\cos\alpha$$

$$dQ = \sigma dS = \sigma 2\pi r\,dr$$

$$\rho^2 = r^2 + L^2 \qquad \cos\alpha = \frac{L}{\rho} = \frac{L}{\sqrt{r^2+L^2}}$$

$$dE_\perp = \frac{1}{\boxed{4}\boxed{\pi}\varepsilon_0}\,\frac{\boxed{2}\sigma\boxed{\pi}r\,dr}{r^2+L^2}\,\frac{L}{\sqrt{r^2+L^2}}$$

$$dE_\perp = \frac{\sigma L}{2\varepsilon_0}\frac{r\,dr}{(r^2+L^2)^{3/2}}$$

$$E_\perp = \frac{\sigma L}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+L^2)^{3/2}}$$

$$r^2+L^2 = t^2 \qquad r=0 \rightarrow t=L$$
$$2r\,dr = 2t\,dt \qquad r=R \rightarrow t=\sqrt{R^2+L^2}$$
$$r\,dr = t\,dt$$

$$E_\perp = \frac{\sigma L}{2\varepsilon_0}\int_L^{(R^2+L^2)^{1/2}} \frac{t\,dt}{(t^2)^{3/2}} = \frac{\sigma L}{2\varepsilon_0}\int_L^{(R^2+L^2)^{1/2}}\frac{t\,dt}{t^3} = \frac{\sigma L}{2\varepsilon_0}\int_L^{(R^2+L^2)^{1/2}}\frac{dt}{t^2} = \frac{\sigma L}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_L^{(R^2+L^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{E_\perp = \frac{\sigma L}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\sqrt{R^2+L^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{L}{L\sqrt{\frac{R^2}{L^2}+1}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{L^2}+1}}\right)}$$

$R \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \boxed{E_\perp = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$ ЈАЧИНА ЕП У БЛИЗИНИ НАЕЛ. РАВНИ

II НАЧИН:

$$E = \iint_S dE\cos\alpha$$

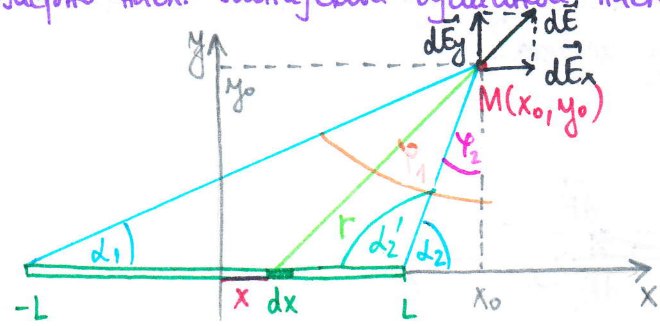
ПОЛАРНЕ КООР. $d(r^2) = 2r\,dr$

$$r\,dr = \frac{1}{2}d(r^2+L^2)$$
$$dS = r\,dr\,d\varphi \qquad (\rho\,d\rho\,d\varphi)$$

$r \in [0,R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$E = \int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma r\,dr\,d\varphi}{r^2+L^2}\cdot\frac{L}{\sqrt{r^2+L^2}} =$$
$$= \frac{\sigma L}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{r\,dr}{(r^2+L^2)^{3/2}}$$

17. Одредити јачину ЕП у тачки $M(x_0, y_0)$ које потиче од нити дужине $2L$ равномерно наел. линијском густином наел. λ.



$$dQ = \lambda dx$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \vec{r}_0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y \Rightarrow E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$\vec{r} = (x_0 - x)\,\vec{e}_x + y_0\,\vec{e}_y$$

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}$$

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{(x_0 - x)\,\vec{e}_x + y_0\,\vec{e}_y}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}}$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x_0 - x)^2 + y_0^2} \frac{(x_0 - x)\,\vec{e}_x + y_0\,\vec{e}_y}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x_0 - x)\,\vec{e}_x + y_0\,\vec{e}_y}{\left((x_0 - x)^2 + y_0^2\right)^{3/2}} dx$$

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x_0 - x)\,dx}{\left((x_0 - x)^2 + y_0^2\right)^{3/2}} \qquad dE_y = \frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dx}{\left((x_0 - x)^2 + y_0^2\right)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L} \frac{x_0 - x}{\left((x_0 - x)^2 + y_0^2\right)^{3/2}} dx$$

СМЕНА: $(x_0 - x)^2 + y_0^2 = t^2$

$$2(x_0 - x)(-dx) = 2t\,dt$$

$$(x_0 - x)\,dx = -t\,dt$$

$x = -L \qquad t = \sqrt{(x_0 + L)^2 + y_0^2} = t_1$

$x = L \qquad t = \sqrt{(x_0 - L)^2 + y_0^2} = t_2$

$$\boxed{E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_1}^{t_2}\frac{-t\,dt}{(t^2)^{3/2}}} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_2}^{t_1}\frac{t\,dt}{t^3} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{t_2}^{t_1}\frac{dt}{t^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{t_2}^{t_1} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{1}{t}\Bigg|_{t_1}^{t_2} =$$

$$\boxed{= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x_0+L)^2+y_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0-L)^2+y_0^2}}\right]}$$

$$E_y = \frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dx}{\left((x_0-x)^2+y_0^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dx}{y_0^3\left(\left(\frac{x_0-x}{y_0}\right)^2+1\right)^{3/2}}$$

СМЕНА: $\frac{x_0-x}{y_0} = t$ $\qquad x=-L \quad t=\frac{x_0+L}{y_0}=t_1$

$x_0-x = y_0 t$ $\qquad x=L \quad t=\frac{x_0-L}{y_0}=t_2$

$-dx = y_0\,dt$

$dx = -y_0\,dt$

$$E_y = \frac{\lambda y_0}{4\pi\varepsilon_0 y_0^3}\int_{t_1}^{t_2}\frac{-y_0\,dt}{(t^2+1)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y_0}\int_{t_2}^{t_1}\frac{dt}{(t^2+1)^{3/2}}$$

СМЕНА: $t = \operatorname{tg}\varphi$ $\qquad t_1=\frac{x_0+L}{y_0} \qquad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{x_0+L}{y_0}$

$dt = \frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$ $\qquad t_2=\frac{x_0-L}{y_0} \qquad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{x_0-L}{y_0}$

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ $\qquad \frac{1}{\cos^2\varphi} = 1+\operatorname{tg}^2\varphi$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y_0} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{(1+tg^2\varphi)\,d\varphi}{(1+tg^2\varphi)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y_0} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y_0} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y_0} \left(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y_0} \left[\sin\left(arctg\,\frac{x_0+L}{y_0}\right) - \sin\left(arctg\,\frac{x_0-L}{y_0}\right)\right]$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \qquad \sin\varphi_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = \cos\alpha_1 .$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 \qquad \sin\varphi_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) = \cos\alpha_2$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

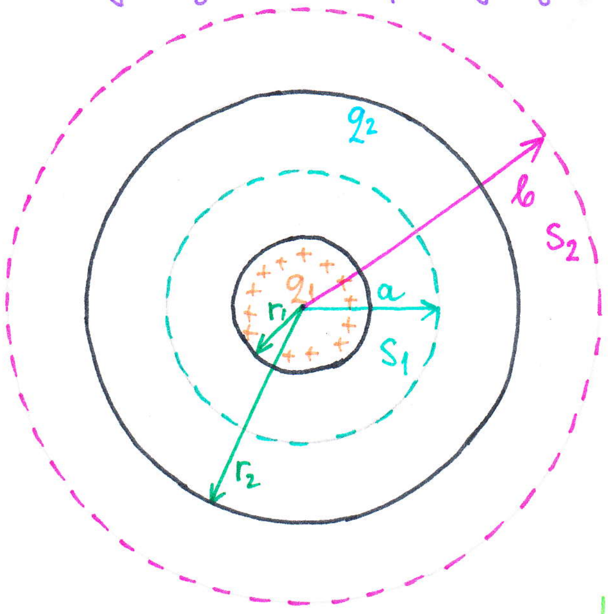
$$\boxed{E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y_0}\left(\frac{x_0+2L}{\sqrt{(x_0+2L)^2+y_0^2}} - \frac{x_0-L}{\sqrt{(x_0-L)^2+y_0^2}}\right)}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y_0}\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2'\right)$$ (непотребно)

18. Метална сфера полупречника r_1 позитивно је наел. количином наел. q_1. Око ње се налази концентрично постављена сфера полупречника r_2 и она носи негативно наел. q_2

а) наћи јачину ЕП на растојању a од центра овог система ако је $r_1 < a < r_2$

б) наћи јачину ЕП на растојању b од центра ако је $b > r_2$



а) $r_1 < a < r_2$

$S_1 = 4\pi a^2$

$$\int_{S_1} D_n \, dS = q_1$$ ГАУСОВА ТЕОРЕМА

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{D} \parallel \vec{n} \Rightarrow D_n = D$

$$\int_{S_1} D \, dS = q_1$$

$$D \int_{S_1} dS = q_1$$

$$D S_1 = q_1$$

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi a^2 = q_1$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{a^2}}$$

б) $b > r_2$

$S_2 = 4\pi b^2$

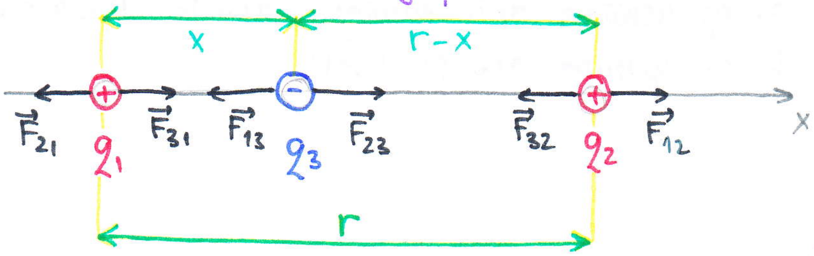
$$\int_{S_2} D_n \, dS = q_1 - q_2$$ ЈЕР ЈЕ q_1 ⊕, А q_2 ⊖

$$D \int_{S_2} dS = q_1 - q_2$$

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi b^2 = q_1 - q_2$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 - q_2}{b^2}}$$

19. Два позитивна наел. q_1 и q_2 налазе се на растојању r. Одредити величину, положај и знак наел. q_3 које треба поставити тако да се систем ова три наел. налази у равнотежи.



1) $F_{31} = F_{21}$, $\vec{F}_{31} + \vec{F}_{21} = 0$

$$\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q_3 q_1}{x^2} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q_2 q_1}{r^2} \qquad (*)$$

2) $F_{32} = F_{12}$, $\vec{F}_{32} + \vec{F}_{12} = 0$

$$\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q_3 q_2}{(r-x)^2} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

3) $F_{13} = F_{23}$, $\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0$

$$\boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q_1 q_3}{x^2} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q_2 q_3}{(r-x)^2}$$

$$\frac{x^2}{(r-x)^2} = \frac{q_1}{q_2}$$

$$\frac{x}{r-x} = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$$

$$x\sqrt{\frac{q_2}{q_1}} = r - x$$

$$x\left(\sqrt{\frac{q_2}{q_1}} + 1\right) = r$$

$$\boxed{x = \frac{r}{\sqrt{\frac{q_2}{q_1}} + 1}}$$

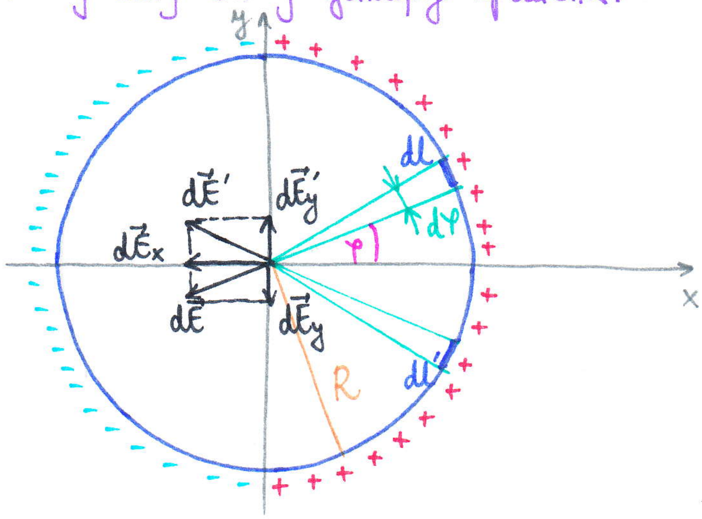
$(*) \Rightarrow \dfrac{q_3}{x^2} = \dfrac{q_2}{r^2}$

$$q_3 = q_2 \frac{x^2}{r^2}$$

$$q_3 = q_2 \frac{\frac{r^2}{\left(\sqrt{(q_2/q_1)} + 1\right)^2}}{r^2}$$

$$\boxed{q_3 = \frac{q_2}{\left(\sqrt{\frac{q_2}{q_1}} + 1\right)^2}}$$

20. Танки непроводни прстен полупречника R наел. је тако да је подужна густина наел. дата изразом $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$ (λ_0 је константа, φ је азимутални угао). Наћи јачину ЕП у центру прстена.



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}$$

$$dq = \lambda\, dl = \lambda_0 \cos\varphi\, dl$$

$$dl = R\, d\varphi$$

$$dq = R\lambda_0 \cos\varphi\, d\varphi$$

$$dE_x = dE\cos\varphi \qquad dE_y = dE\sin\varphi$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boxed{R}\lambda_0\cos\varphi\, d\varphi}{R^{\boxed{2}}}\cos\varphi$$

$$E_x = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\,\frac{1}{2}\left(\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \underbrace{\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}}_{=0}\right) =$$

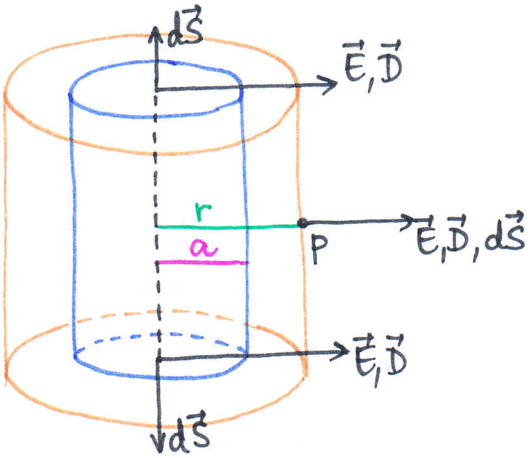
$$= \frac{\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 R}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\lambda_0}{16\varepsilon_0 R}$$

$$E_R = 4\cdot E_x =$$

$$= 4\cdot\frac{\lambda_0}{16\varepsilon_0 R}$$

$$\boxed{E_R = \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}}$$

21. Дат је бесконачан цилиндар полупречника a, равномерно наел. површинском густином наел. σ. Наћи јачину ЕП у тачки P на растојању r од осе цилиндра и одредити силу којом би цилиндар деловао на тачкасто наел. q у тачки P.



$$\cancelto{0}{\iint_{B_1} \vec{D}\cdot d\vec{S}} + \cancelto{0}{\iint_{B_2} \vec{D}\cdot d\vec{S}} + \iint_{M} \underbrace{\vec{D}\cdot d\vec{S}}_{D\cdot dS} = q$$

$$D\iint_{M} dS = q$$

$$D\cdot 2r\pi l = q$$

$$q = \sigma\cdot M = \sigma\, 2r\pi\cdot l$$

$$q = 2a\sigma\pi l$$

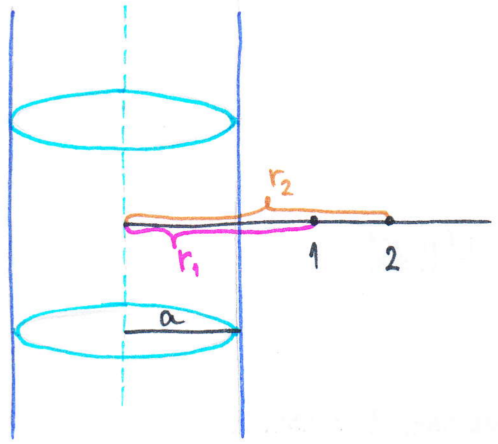
$$\varepsilon_0 E\, \boxed{2\pi} r \boxed{l} = \boxed{2} a\sigma \boxed{\pi} \boxed{l}$$

$$\boxed{E = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}}$$

$$\vec{E} = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}\,\vec{e}_r$$

РАЗЛИКА ПОТЕНЦИЈАЛА

22. Бесконачно прави, кружни цилиндар позитивно је наел. површинском густином наел. σ. Полупречник цилиндра је a. Наћи потенцијалну разлику између тачака 1 и 2 $(a<r_1<r_2)$ у ЕП тог цилиндра. Израчунати ту разлику ако је $\sigma=10^{-9}\frac{C}{m^2}$, $a=10^{-2}m$ и $r_2/r_1=2{,}71$



$$E=\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$q_1=\sigma\cdot 2\pi a\cdot 1$ НАЕЛ. ПО ЈЕДИНИЦИ ДУЖИНЕ ЦИЛИНДРА

$$E\ \frac{\sigma\cdot\boxed{2\pi}a}{\boxed{2\pi}\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ \frac{a}{r}$$

$$U_{12}=\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$U_{12}=\int_{r_1}^{r_2}E_r\,dr$$ E_r – ПРОЈЕКЦИЈА $\vec{E}$ ДУЖ ПРАВЦА $\vec{r}$

$$\boxed{U_{12}}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{a}{r}\,dr=$$

$$=\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ \ln\Big|_{r_1}^{r_2}=$$

$$=\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}(\ln r_2-\ln r_1)=$$

$$\boxed{=\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$U_{12}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a\ln\frac{r_2}{r_1}=$$

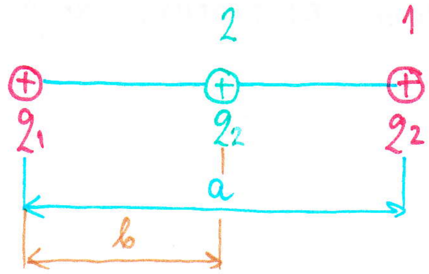
$$=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a\ln e=$$

$$=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a=$$

$$=\frac{10^{-9}\frac{C}{m^2}}{8{,}85\cdot10^{-12}\frac{F}{m}}\cdot10^{-2}m=$$

$$=1{,}13V$$

23. Два позитивна тачкаста ~~наел.~~ оптерећење q_1 и q_2 се налазе на међусобном растојању a. Одредити рад који је потребно уложити да би се оптерећење q_2 приближило оптерећењу q_1 на неко растојање b.



$$U_{12} = \int_1^2 E_s \, dS \qquad U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{x} \qquad \vec{E} \parallel \vec{x} \quad \text{тј.} \quad \vec{E} \parallel d\vec{x}$$

$A_{12} = q \, U_{12}$ РАД СИЛА ПОЉА ПРИ ПРЕМЕШТАЊУ НАЕЛ. q ИЗ ТАЧ. 1 У ТАЧ. 2

$$U_{12} = \int_a^b E_1 dx =$$

$$= \int_a^b \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_a^b$$

$$U_{12} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

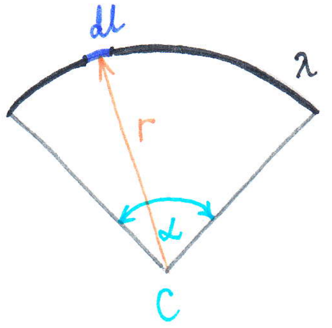
$$A_{12} = q_2 U_{12} =$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$A = -A_{12}$ РАД СПОЉАШЊИХ СИЛА

$$\boxed{A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)}$$

24. Део кружнице који се из центра види под углом α равномерно је наел. линијском густином наел. λ. Наћи потенцијал тачке у којој је центар, у односу на бескрајно удаљену тачку.



$$dq = \lambda dl$$

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

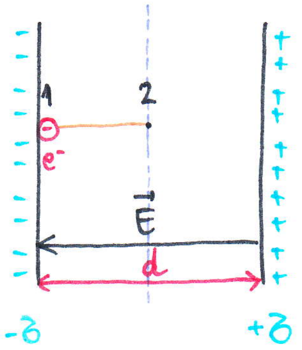
$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \int dl =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \, r\alpha$$

$$\boxed{U = \frac{\lambda\alpha}{4\pi\varepsilon_0}}$$

25. Који рад треба да изврше спољашње силе да би један e^- између облога равног кондензатора био удаљен од негативне облоге кондензатора за половину растојања између облога? Површинска густина наел. кондензатора је σ.



$A_{12} = q U_{12}$ РАД СИЛА ПОЉА

$A_{12} = e U_{12}$

$A = -A_{12}$ РАД СПОЉАШЊИХ СИЛА

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot dx \, \vec{e}_x = E(-\vec{e}_x) \, dx \, \vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad E_x = -E$$

$$U_{12} = \int_1^2 E_x\,dx = -\int_1^2 E\,dx$$

$$A = -e\left(-\int_1^2 E\,dx\right) =$$

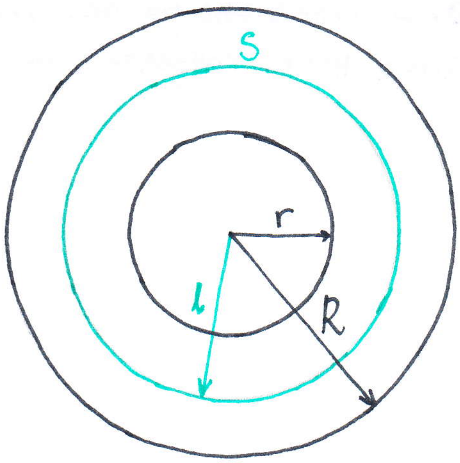
$$= eE\int_1^2 dx =$$

$$= eE\; x\Big|_0^{d/2}$$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ЕП БЛИЗУ НАЕЛ. ПОВРШИНЕ ПРОВОДНИКА

$$\boxed{A = \frac{e\sigma}{\varepsilon_0}\,\frac{d}{2}}$$

26. Сфера радијуса r постављена је у центар веће сфере радијуса R. Сфере су равномерно наел. количинама наел. q и Q.
 а) израчунати напон између сфера
 б) израчунати тај напон ако је $q = 10^{-9}$ C, $r = 1$cm и $R = 2$ cm



$$U = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_1^2 E\,dl$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q$$

$$\oiint_S D\,dS = q$$

$$D\oiint_S dS = q \quad \Rightarrow \quad D\cdot S = q \quad \Rightarrow \quad D\cdot 4\,l^2\pi = q$$

$$4\varepsilon_0 E l^2 \pi = q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l^2}$$

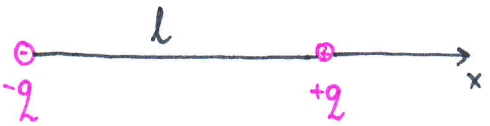
$$U_{12} = \int_1^2 E\,dl =$$

$$= \int_r^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\,dl =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^R \frac{dl}{l^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{l}\right)\Bigg|_r^R$$

$$\boxed{U_{12} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$$

27. Тачкасто оптерећење $+q$ се налази на удаљености l од тачкастог наел. $-q$. Израчунати рад који је потребно утрошити да би се $+q$ веома удаљило од $-q$ (удаљити у бесконачност).



$$A = qU =$$

$$= \underbrace{q\int \vec{E}}_{=\vec{F}}\cdot d\vec{x} =$$

сила привлачења

$$= \int \vec{F}(x)\,d\vec{x} =$$

$\vec{F} \parallel d\vec{x}$

$\vec{F}d\vec{x} = F\,dx$

$$= \int_l^\infty F\,dx =$$

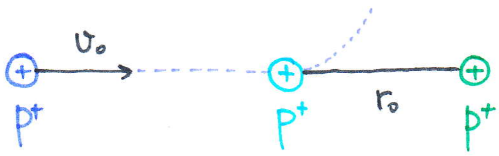
$$= \int_l^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2}\,dx$$

$$A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_l^\infty =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l} - \cancel{\frac{1}{\infty}}^{\,0}\right)$$

$$\boxed{A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l}}$$

28. Протон, чија је почетна брзина v_0, јури ка другом протону који мирује. До ког минималног растојања r_0 од непокретног p^+ ће покретни p^+ стићи, ако узмемо да је физички критеријум за остваривање тог догађаја једнакост кинетичке енергије наилазећег p^+ и електростатичке енергије међусобног одбијања два протона?



$$E_k = E_p$$

$$E_k = \frac{m v^2}{2}$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

$$\frac{m_p v_0^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e \cdot e}{r_0}$$

$$\boxed{r_0 = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 m_p v_0^2}}$$

$$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg$$

$$m_p = 1836\ m_e$$

$$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$$

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$$

3Δ3 $v_0 = 25 \cdot 10^5\ m/s$

ЕНЕРГИЈА ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОЉА
КАПАЦИТЕТ ПРОСТИХ КОНДЕНЗАТОРА

29. Претпостављајући да се на облогама кондензатора налази неко оптерећење q. Извести изразе помоћу којих се рачуна капацитет простих кондензатора (равански, сферни и цилиндрични).

ОПШТИ ПОСТУПАК:

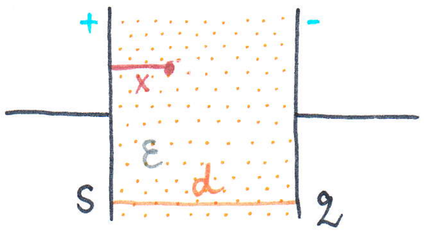
А) РАЧУНА СЕ ПОТЕНЦИЈАЛ У ЕП ПОСМАТРАНОГ КОНДЕНЗАТОРА

Б) РАЧУНА СЕ НАПОН ИЗМЕЂУ ОБЛОГА КОНДЕНЗАТОРА

В) КАПАЦИТЕТ ОДРЕЂУЈЕМО ПОМОЋУ ФОРМУЛЕ $C = \frac{q}{U_0}$

$$U \downarrow U_0 \downarrow C$$

1) РАВАНСКИ КОНДЕНЗАТОР



$$U = \int_0^x E\,dx =$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} x$$

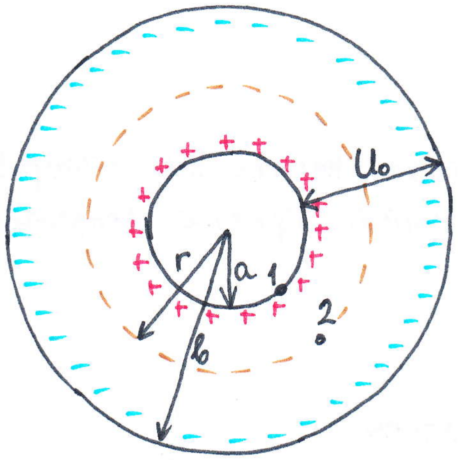
$$U_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} d$$ НАПОН ИЗМЕЂУ ОБЛОГА

$$C = \frac{q}{U_0} =$$

$$= \frac{\sigma \cdot S}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon}}$$

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d}}$$

2) СФЕРНИ КОНДЕЗАТОР



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ \frac{q}{r^2}$$

$$U = \int_1^2 E_r\,dr$$

$$U = \int_a^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ \frac{q}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_a^r \frac{dr}{r^2}$$

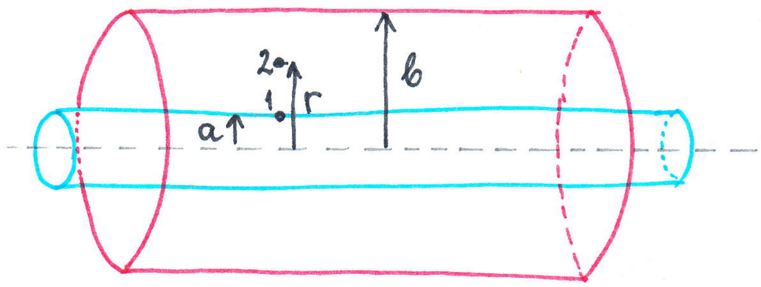
$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)$$

$$U_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{q}{U_0} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

$$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}}$$

3) цилиндрични кондензатор



$$E = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$$

q_1 - наел. по јединици дужине

$$U = \int_1^2 E\,dr =$$

$$= \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_a^r \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln\frac{r}{a}$$

$$U_0 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln\frac{b}{a}$$

$$C_1 = \frac{q_1}{U_0}$$

капацитет по јединици дужине

$$C_1 = \frac{q_1}{\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}}$$

ПРЕГЛЕД ОСНОВНИХ ФОРМУЛА

1) $C = \frac{q}{U}$ – НАЕЛ. НА ОБЛОГАМА КОНДЕНЗАТОРА
– НАПОН ИЗМЕЂУ ОБЛОГА КОНДЕНЗАТОРА

2) РАВАНСКИ КОНДЕНЗАТОР: $C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d}$

3) СФЕРНИ КОНДЕНЗАТОР: $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$

4) ЦИЛИНДРИЧНИ КОНДЕНЗАТОР: $C_l = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}$

5) ЕНЕРГИЈА ЕЛЕКТРИЧНОГ КОНДЕНЗАТОРА: $W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q U$

6) КАПАЦИТЕТ ПАРАЛЕЛНО ВЕЗАНИХ КОНДЕНЗАТОРА: $C = \sum_i^n C_i$

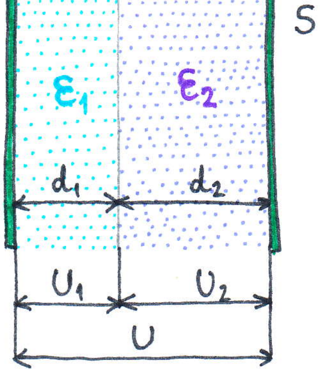
7) КАПАЦИТЕТ РЕДНО ВЕЗАНИХ КОНДЕНЗАТОРА: $\frac{1}{C} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}$

8) ЗАПРЕМИНСКА ГУСТИНА ЕНЕРГИЈЕ ЕП: $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon E^2$

9) УКУПНА ЕНЕРГИЈА ЕП: $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V \varepsilon E^2 \, dV$

ЗАПРЕМИНА У КОЈОЈ ПОСТОЈИ ЕП

30. Равни кондензатор има облоге површине S. Простор између облога је у целости испуњен са два слоја диелектрика. Слој дебљине d_1 има диелектричну пропустљивост ε_1, а слој дебљине d_2 диелектричну пропустљивост ε_2. Наћи капацитет овог кондензатора.



$C = \frac{q}{U}$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ ЕП БЛИЗУ ПОВРШИНЕ НАЕЛ. ПРОВОДНИКА; ЕП ИЗМЕЂУ ДВЕ НАЕЛ. РАВНИ ($E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} \times 2$)

$U = U_1 + U_2$

$U = E \cdot d$

$U_1 = E_1 d_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1$

$U_2 = E_2 d_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2$

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2$$

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

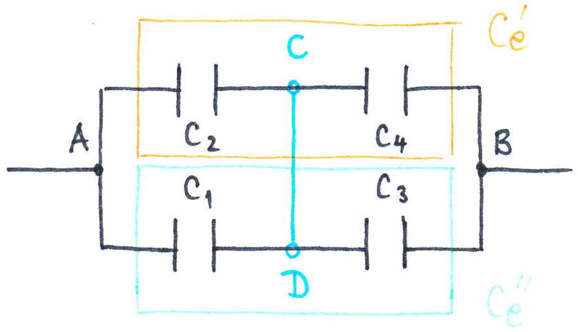
$$U = \frac{q}{S\varepsilon_0\varepsilon_1} d_1 + \frac{q}{S\varepsilon_0\varepsilon_2} d_2 =$$

$$= \frac{q}{S\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$$

$$C = \frac{q}{\frac{q}{S\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)}$$

$$\boxed{C = \frac{S\varepsilon_0}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}}$$

31. Посматрајмо батерију кондензатора везаних као на слици.
   а) Наћи еквивалентни капацитет између тачака A и B
   б) Наћи еквивалентни капацитет између тачака A и B ако се тачке C и D кратко споје
   в) Могу ли се изабрати капацитети C_1, C_2, C_3 и C_4 тако да уметање кратког споја између C и D не мења еквивалентни капацитет између тачака A и B?



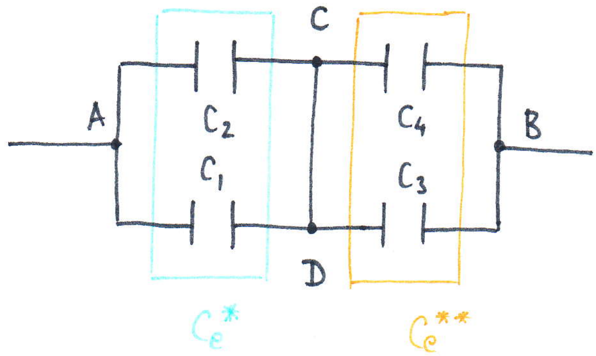
а) $$\frac{1}{C_e'} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} = \frac{C_2 + C_4}{C_2 C_4}$$

$$\frac{1}{C_e''} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_1 + C_3}{C_1 C_3}$$

$$C_e^{u'} = C_e' + C_e''$$

$$\boxed{C_e^{u'} = \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} + \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}}$$

б)



$$C_e^* = C_1 + C_2$$

$$C_e^{**} = C_3 + C_4$$

$$\frac{1}{C_e^{*\cup}} = \frac{1}{C_e^*} + \frac{1}{C_e^{**}} =$$

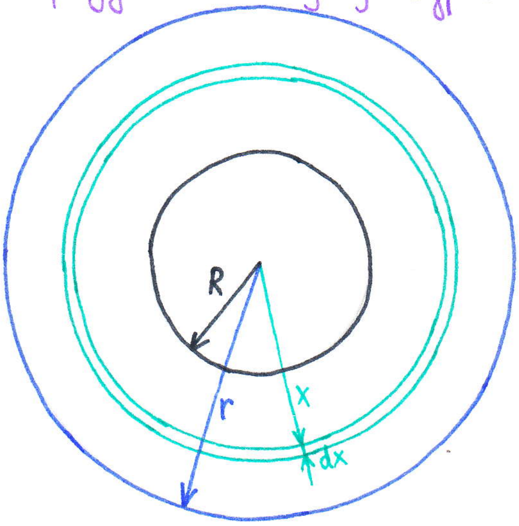
$$= \frac{1}{C_1+C_2} + \frac{1}{C_3+C_4} = \frac{C_1+C_2+C_3+C_4}{(C_1+C_2)(C_3+C_4)}$$

$$\boxed{C_e^{\cup *} = \frac{(C_1+C_2)(C_3+C_4)}{C_1+C_2+C_3+C_4}}$$

в) $C_e^{\cup'} = C_e^{\cup *}$

$$\frac{C_2C_4}{C_2+C_4} + \frac{C_1C_3}{C_1+C_3} = \frac{(C_1+C_2)(C_3+C_4)}{C_1+C_2+C_3+C_4}$$

32. Метална кугла полупречника R равномерно је наел. количином наел. q. Око кугле је хомогени и изотропни диелектрик диелектричне пермитивности ε. Одредити енергију W ЕП која је садржана у сфери полупречника r $(r>R)$.



$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2(x)$$ ЗАПРЕМИНСКА ГУСТИНА

$$W=\int_V w\,dV$$

$$dV=4\pi x^2dx \qquad E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{x^2} \ *$$

$$W=\int_R^r\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{x^2}\right)^2 4\pi x^2dx$$

$$W=\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\frac{q^2 4\pi}{16\pi^2\varepsilon_0^2\varepsilon^2}\int_R^r\frac{x^2dx}{x^4}$$

$$W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_R^r\frac{dx}{x^2}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_R^r$$

$$\boxed{W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)}$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \varepsilon_0\varepsilon E\,dS=q$$

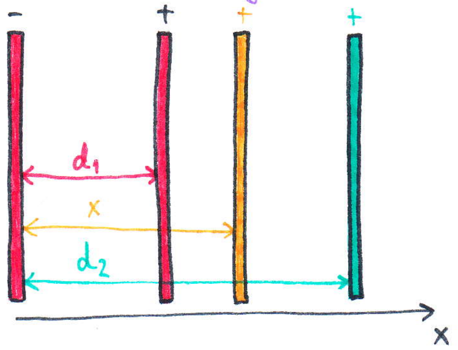
$$\varepsilon_0\varepsilon E\oint\!\!\!\oint_S dS=q$$

$$4r^2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon E=q$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}$$

$dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$ (II начин)

33. Равански ваздушни кондензатор дебљине d_1 има облоге површине S. Кондензатор је прикључен на извор напајања који има константну електромоторну силу $\mathcal{E}$. Непрекидајући везу кондензатора са извором напајања размичемо облоге кондензатора до неког финалног стања када добијамо кондензатор дебљине d_2. Колики смо рад при том извршили?



$$F(x)=\frac{1}{2}\varepsilon_0 S E^2(x)$$ СИЛА КОЈОМ СЕ ПРИВЛАЧЕ ОБЛОГЕ

$$E=\frac{U}{x}=\frac{\mathcal{E}}{x}$$

$$dA=F(x)dx$$

$$\boxed{A=\int dA=\int_{d_1}^{d_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0 S\frac{\mathcal{E}^2}{x^2}dx=\frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2}{2}\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}\right)}$$

II НАЧИН:

$A = \Delta W = W_2 - W_1$

$$W = \int_V w\,dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV$$

$$V = \int_V dV \qquad V = S \cdot d$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d \cdot S =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} S \cdot d =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{q^2}{S^2}}{\varepsilon_0} S d = \frac{q^2 \boxed{S} d}{2\varepsilon_0 S^{\boxed{2}}}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2 d}{\varepsilon_0 S}$$

$$W_1 = \frac{q_1^2 d_1}{2\varepsilon_0 S} \qquad W_2 = \frac{q_1^2 d_2}{2\varepsilon_0 S}$$

$$q_1 = C_1 \mathcal{E} \qquad q_2 = C_2 \mathcal{E}$$

$$C_1 \neq C_2 \Rightarrow q_1 \neq q_2$$

МЕЊА СЕ ЈЕР ЗАВИСИ ОД РАСТОЈАЊА

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} \qquad C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_2}$$

$$\Rightarrow q_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1}\mathcal{E} \qquad q_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_2}\mathcal{E}$$

$$A = W_2 - W_1 =$$

$$= \frac{q_2^2 d_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_1^2 d_1}{2\varepsilon_0 S} =$$

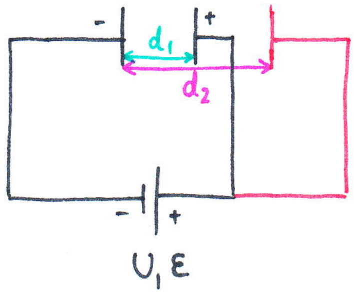
$$= \frac{1}{2\varepsilon_0 S}\left(\varepsilon_0^2 \frac{S^2}{d_2^2}\mathcal{E}^2 d_2 - \varepsilon_0^2 \frac{S^2}{d_1^2}\mathcal{E}^2 d_1\right)$$

$$A = \frac{\varepsilon_0^{\boxed{2}} S^{2} \mathcal{E}^2}{2\boxed{\varepsilon_0} S}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)$$

$$A_s = -A$$

$$\boxed{A_s = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S \mathcal{E}^2\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)}$$

34. Равански ваздушни кондензатор дебљине d_1 има облоге површине S. Оптерећен је до напона U, па откачен од извора напајања. Да би се облоге раставиле на два пута веће растојање од постојећег треба уложити одређени рад. Колики?



$d_2 = 2d_1$

$$q = CU$$

$$C = \frac{\varepsilon_0}{d} S$$

$$A = \Delta W = W_2 - W_1$$

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S d \quad / \cdot \frac{d}{d}$$

$$W = \frac{1}{2} \underbrace{\boxed{\frac{\varepsilon_0}{d} S}}_{=C} \underbrace{\boxed{E^2 d^2}}_{=U^2} \Rightarrow W = \frac{1}{2} C U^2$$

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U^2$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} U^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} U^2$$

$$d_2 = 2d_1$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{2}} U^2$$

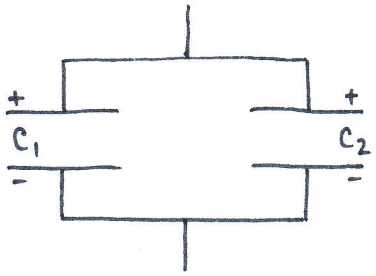
$$W_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} U^2$$

$$A = W_2 - W_1 =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 S U^2}{d_1} - \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d_1}$$

$$\boxed{A = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d_1}}$$

35. Кондензатор капацитета C_1 био је оптерећен до напона U_1, а кондензатор капацитета C_2 до напона U_2. После тога је од два кондензатора направљена веза као на слици. Описати енергетски биланс који настаје при овој трансформацији.



1) ПРЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ:

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2$$

⇒ УКУПНА ЕНЕРГИЈА: $W_I = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}\left(C_1U_1^2 + C_2U_2^2\right)$

2) НАКОН ТРАНСФОРМАЦИЈЕ (СПАЈАЊА):

$C_e = C_1 + C_2$ ПАРАЛЕЛНО ВЕЗАНИ [+ НА +, - НА - ⇒ САБИРАЈУ СЕ; + НА - ⇒ ОДУЗИМАЈУ СЕ]

ЗАКОН ОДРЖАЊА НАЕЛ.: $q = q_1 + q_2$

$q_1 = C_1U_1$ $q_2 = C_2U_2$ ⇒ $q = C_1U_1 + C_2U_2$

$$W_{II} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_e} = \frac{1}{2}\frac{(C_1U_1 + C_2U_2)^2}{C_1 + C_2}$$

$$\Delta W = W_{II} - W_I =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(C_1U_1 + C_2U_2)^2}{C_1 + C_2} - \frac{1}{2}\left(C_1U_1^2 + C_2U_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2(C_1 + C_2)}\left[(C_1U_1 + C_2U_2)^2 - (C_1 + C_2)(C_1U_1^2 + C_2U_2^2)\right] =$$

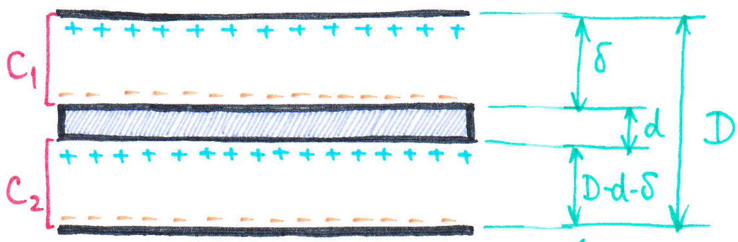
$$= \frac{1}{2(C_1 + C_2)}\left[\boxed{C_1^2U_1^2} + 2C_1C_2U_1U_2 \boxed{+ C_2^2U_2^2} \boxed{- C_1^2U_1^2} - C_1C_2U_2^2 - C_1C_2U_1^2 \boxed{- C_2^2U_2^2}\right]$$

$$\Delta W = \frac{1}{2(C_1+C_2)}\left(2C_1C_2U_1U_2 - C_1C_2U_2^2 - C_1C_2U_1^2\right) =$$

$$= \frac{-C_1C_2}{2(C_1+C_2)}\left(-2U_1U_2 + U_2^2 + U_1^2\right)$$

$$\boxed{\Delta W = -\frac{C_1C_2}{2(C_1+C_2)}\left(U_1-U_2\right)^2}$$

36. Посматрајмо равански кондензатор површине S и дебљине D. У простору између облога се налази метална плочица d. Кондензатор није прикључен на извор напајања, али је претходно оптерећен до напона U. Наћи:
а) енергију кондензатора
б) енергију кондензатора када нема металне плочице
в) количник ове две енергије. Дискутовати овај однос.



ДОЛАЗИ ДО ПРЕМЕШТАЊА НАЕЛ. УНУТАР ПРОВОДНИКА

(ПЛОЧИЦА НЕ МОРА БИТИ ПОДЈЕДНАКО УДАЉЕНА ОД ПЛОЧА КОНД.)

а) СИСТЕМ СЕ МОЖЕ ПОСМАТРАТИ КАО РЕДНА ВЕЗА ДВА КОНДЕНЗАТОРА

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1+C_2}{C_1C_2} \Rightarrow C_e = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

$$W_1 = \frac{1}{2}C_eU^2$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{\delta} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{D-d-\delta}$$

$$C_e = \frac{\frac{\varepsilon_0 S}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon_0 S}{D-d-\delta}}{\frac{\varepsilon_0 S}{\delta}+\frac{\varepsilon_0 S}{D-d-\delta}} = \frac{\frac{\varepsilon_0^2 S^2}{\delta(D-d-\delta)}}{\varepsilon_0 S\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{D-d-\delta}\right)} = \frac{\frac{\varepsilon_0 S}{\boxed{\delta(D-d-\delta)}}}{\frac{D-d-\delta+\delta}{\boxed{\delta(D-d-\delta)}}}$$

$$C_e = \frac{\varepsilon_0 S}{D-d}$$

$$\boxed{W_1 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{D-d}U^2}$$

б) $C' = \dfrac{\varepsilon_0 S}{D}$

$q = \text{const}$ $\qquad q = C_e U = \dfrac{\varepsilon_0 S}{D-d}\cdot U$

$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C'} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{\varepsilon_0^2 S^2 U^2}{(D-d)^2}}{\frac{\varepsilon_0 S}{D}} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S D U^2}{(D-d)^2}$$

$$\boxed{W_2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S D}{(D-d)^2}U^2}$$

в) $k = \dfrac{W_1}{W_2} =$

$$= \frac{\boxed{\frac{1}{2}}\,\frac{\boxed{\varepsilon_0 S}U^2}{\boxed{D-d}}}{\boxed{\frac{1}{2}}\,\frac{\boxed{\varepsilon_0 S}DU^2}{(D-d)^2}} =$$

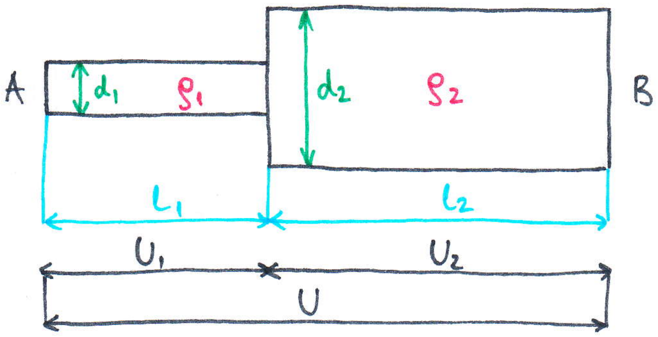
$$= \frac{D-d}{D} = 1 - \frac{d}{D}$$

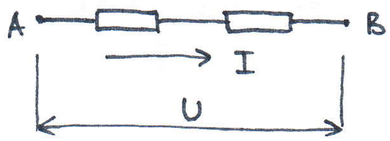
$k < 1 \Rightarrow$ ЕНЕРГИЈА СЕ ПОВЕЋАВА

ЗА ИЗВЛАЧЕЊЕ ПЛОЧИЦЕ ТРЕБА УЛОЖИТИ РАД И ЗА ТАЈ РАД ЈЕ W_2 ВЕЋЕ ОД W_1

Константе једносмерне струје

37. Две жице, дебљина d_1 и d_2, и дужина l_1 и l_2, везане су на ред. На крајевима ове комбинације делује напон U. Наћи напоне који делују на крајевима обе жице, ако су познате специфичне отпорности материјала жица, ρ_1 и ρ_2.





$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S_1} \qquad R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S_2}$$

$$S_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} \qquad S_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4}$$

$$U_1 = R_1 I = \qquad\qquad U_2 = R_2 I =$$

$$= \rho_1 \frac{l_1}{S_1} \cdot \frac{U}{\rho_1 \frac{l_1}{S_1} + \rho_2 \frac{l_2}{S_2}} \qquad\qquad = \rho_2 \frac{l_2}{S_2} \frac{U}{\rho_1 \frac{l_1}{S_1} + \rho_2 \frac{l_2}{S_2}}$$

$$\boxed{U_1 = \frac{U}{1 + \frac{\rho_2 l_2 S_1}{\rho_1 l_1 S_2}}} \qquad\qquad \boxed{U_2 = \frac{U}{1 + \frac{\rho_1 l_1 S_2}{\rho_2 l_2 S_1}}}$$

38. Колика количина оптерећења прође кроз проводник ако почев од тренутка $t=0$ струја почне експоненцијално да опада од неке вредности I_0 до нуле?

$$i = I_0 e^{-\alpha t}$$

α - константа од које зависи брзина опадања интензитета стр.

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int_0^t i\,dt$$

$$q = \int_0^\infty I_0 e^{-\alpha t}\,dt =$$

$$= I_0 \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha t}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{I_0}{\alpha} e^{-\alpha t}\Big|_{+\infty}^{0} = \frac{I_0}{\alpha}(1-0) = \frac{I_0}{\alpha}$$

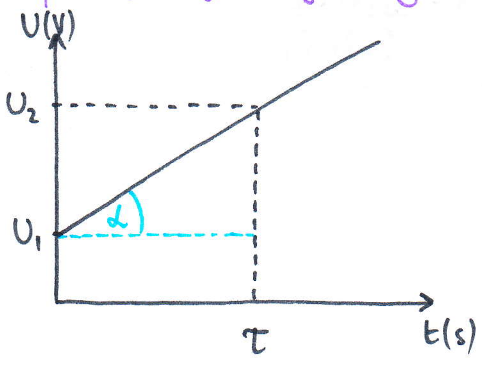
$$i = I_0 e^{-\alpha t}$$

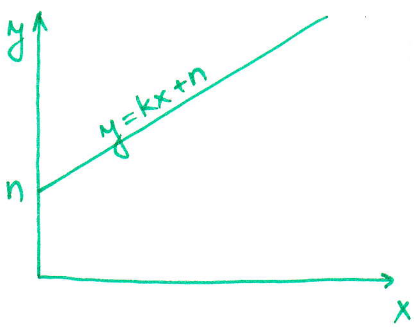
$$\left|\frac{di}{dt}\right| = \alpha I_0 e^{-\alpha t}$$

$$t=0 \Rightarrow \left|\frac{di}{dt}\right| = \alpha I_0 \qquad \alpha = \frac{\left|\frac{di}{dt}\right|}{I_0}$$

$$q = \frac{I_0}{\frac{\left|\frac{di}{dt}\right|}{I_0}} \qquad \boxed{q = I_0^2 \left|\frac{dt}{di}\right|}$$

39. Напон на крајевима проводника отпорности r линеарно расте за време τ од почетне вредности U_1 до крајње вредности U_2. Која количина наел. протекне кроз проводник у току тог процеса?





$$U = kt + U_1$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$U = \frac{U_2 - U_1}{\tau} t + U_1$$

$$i = \frac{U}{r} = \frac{U_2 - U_1}{\tau r} t + \frac{U_1}{r}$$

$$q = \int_0^t i\,dt$$

$$q = \int_0^\tau \left[\frac{U_2 - U_1}{\tau r} t + \frac{U_1}{r} \right] dt =$$

$$= \frac{U_2 - U_1}{\tau r} \int_0^\tau t\,dt + \frac{U_1}{r} \int_0^\tau dt =$$

$$= \frac{U_2 - U_1}{\tau r} \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^\tau + \frac{U_1}{r} \left. t \right|_0^\tau =$$

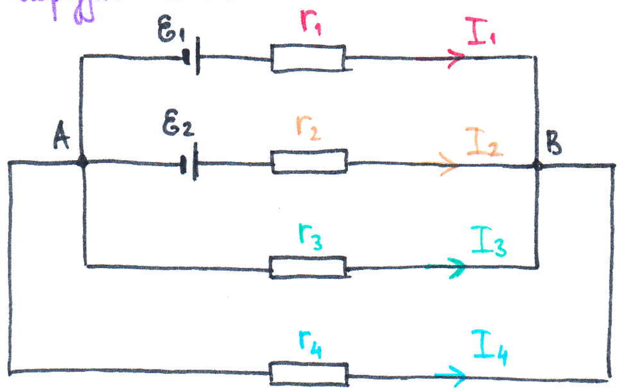
$$= \frac{U_2 - U_1}{\tau r} \frac{\tau^2}{2} + \frac{U_1 \tau}{r} =$$

$$= \frac{\tau (U_2 - U_1)}{2r} + \frac{U_1 \tau}{r}$$

$$q = \frac{\tau}{2r} \left(U_2 - U_1 + 2U_1 \right)$$

$$\boxed{q = \frac{\tau}{2r} (U_1 + U_2)}$$

40. Струјни извори ЕМС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, занемарљивих унутрашњих отпорности, везати су као на слици. Одредити јачине струја које теку у гранама овог сложеног струјног кола.



I Кирхофово правило ⇒ за B чвор : $I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$ (за чворове)

$\sum_i I_i = 0$

II Кирхофово правило $\sum_i R_i I_i = \sum_i \mathcal{E}_i$ (за контуре)

$(A\,\mathcal{E}_1\,r_1\,B\,r_2\,\mathcal{E}_2\,A)$: $I_1 r_1 - I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$

$(A\,\mathcal{E}_2\,r_2\,B\,r_3\,A)$: $I_2 r_2 - I_3 r_3 = \mathcal{E}_2$

$(A\,r_3\,B\,r_4\,A)$: $I_3 r_3 - I_4 r_4 = 0$

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 + I_3 - I_4 &= 0\\
I_1 r_1 - I_2 r_2 &= \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2\\
I_2 r_2 - I_3 r_3 &= \mathcal{E}_2\\
I_3 r_3 - I_4 r_4 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ r_1 & -r_2 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & -r_3 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & -r_4 \end{vmatrix}
$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 & -r_2 & 0 & 0 \\ \mathcal{E}_2 & r_2 & -r_3 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & -r_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ r_1 & \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2 & -r_3 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & -r_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ r_1 & -r_2 & \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 & 0 \\ 0 & r_2 & \mathcal{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ r_1 & -r_2 & 0 & \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \\ 0 & r_2 & -r_3 & \mathcal{E}_2 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \end{vmatrix}$$

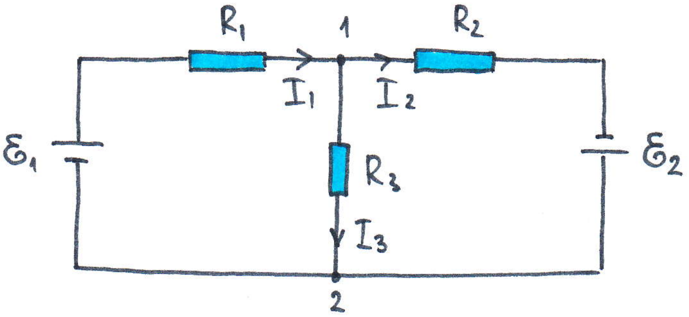
$$\boxed{I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \qquad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad I_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}}$$

3Δ3 $\mathcal{E}_1 = 10\,V$ $\quad \mathcal{E}_2 = 4\,V$

$r_1 = r_4 = 2\,\Omega$

$r_2 = r_3 = 4\,\Omega$

41. Израчунати струје кроз све отпорнике са слике ако је $\mathcal{E}_1 = 1V$, $\mathcal{E}_2 = 2V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$ и $R_3 = 3\Omega$.



$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$(\mathcal{E}_1 R_1 1 R_2 \mathcal{E}_2 2 \mathcal{E}_1)$ $\quad I_1R_1 + I_2R_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$

$(1 R_2 \mathcal{E}_2 2 R_3 1)$ $\quad I_2R_2 - I_3R_3 = \mathcal{E}_2$

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ I_1R_1 + I_2R_2 &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \\ I_2R_2 - I_3R_3 &= \mathcal{E}_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ I_1 + 2I_2 &= 1+2 = 3 \\ 2I_2 - 3I_3 &= 2 \end{aligned}$$

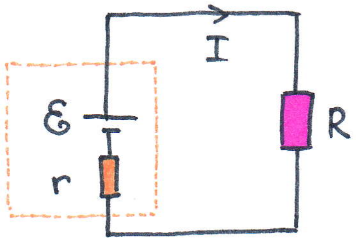
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-6-0) + (-3-0) - (2-0) = -11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-9-0) - (6-4) = -11 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1 = \frac{D_1}{D} = 1A}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-9-0) - (2-0) = -11 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_2 = \frac{D_2}{D} = 1A}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4-6) + (2-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_3 = \frac{D_3}{D} = 0}$$

42. Струјни извор и отпорник R су везани као на слици. Не знамо колико су ЕМС $\mathcal{E}$ и унутрашња отпорност извора r. Позната је струја кратког споја I_{ks}. Зна се и да ако уместо отпорника R имамо отпорник R_0, струја коју даје извор је I_0. Наћи струју у колу са слике.



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_0+r}$$

$$I_{ks} = \frac{\mathcal{E}}{r} \Rightarrow r = \frac{\mathcal{E}}{I_{ks}}$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + \frac{\mathcal{E}}{I_{ks}}}$$

$$I_0 R_0 + I_0 \frac{\mathcal{E}}{I_{ks}} = \mathcal{E}$$

$$\mathcal{E}\left(1 - \frac{I_0}{I_{ks}}\right) = I_0 R_0$$

$$\mathcal{E} = \frac{I_0 R_0}{1 - \frac{I_0}{I_{ks}}}$$

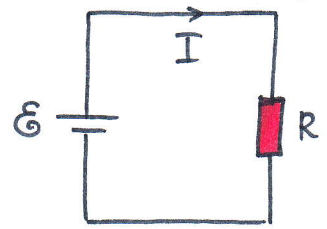
$$r = \frac{\frac{I_0 R_0}{1 - I_0/I_{ks}}}{I_{ks}}$$

$$r = \frac{I_0 R_0}{I_{ks}\left(1 - \frac{I_0}{I_{ks}}\right)} = \frac{I_0 R_0}{I_{ks} - I_0}$$

$$I = \frac{\frac{I_0 R_0}{1 - \frac{I_0}{I_{ks}}}}{R + \frac{I_0 R_0}{I_{ks} - I_0}} = \frac{\frac{I_0 R_0 I_{ks}}{I_{ks} - I_0}}{\frac{R(I_{ks} - I_0) + I_0 R_0}{I_{ks} - I_0}}$$

$$\boxed{I = \frac{I_0 R_0 I_{ks}}{R(I_{ks} - I_0) + I_0 R_0}}$$

43. Струјни извор ЕМС $\mathcal{E}$ и унутрашње отпорности r напаја потрошач отпорности R. Колика се снага ослобађа на отпорнику? Колики је коефицијент корисног дејства струјног извора?



$P = RI^2$ снага на отпорнику

$I = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$ Омов закон

$$\boxed{P = R\,\frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2}}$$

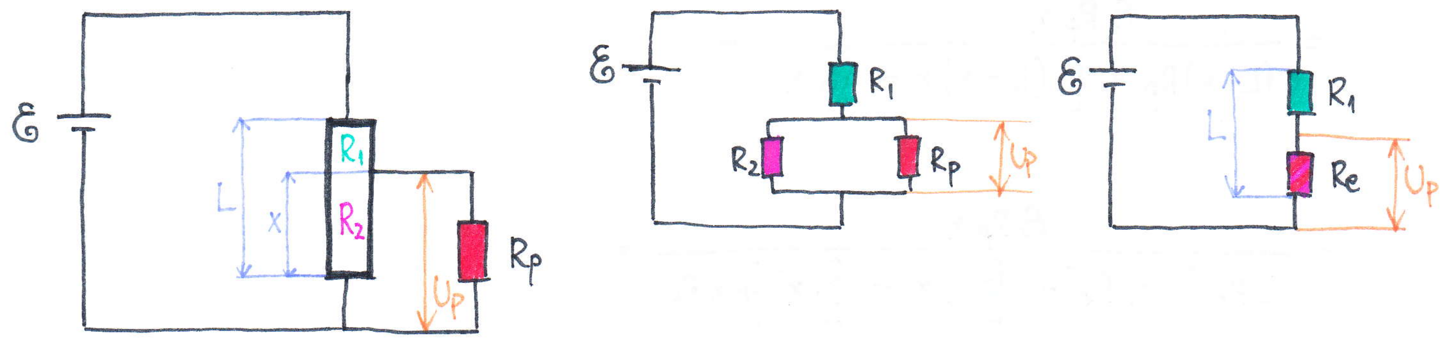
$\eta = \dfrac{P}{P_0}$ коеф. корисног дејства извора

$P_0 = \mathcal{E} I = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R+r}$ снага извора

$$\eta = \frac{\dfrac{R\mathcal{E}^2}{(R+r)^2}}{\dfrac{\mathcal{E}^2}{R+r}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{R}{R+r}}$$

44. Потенциометар укупне отпорности R везан је у коло са струјним извором ЕМС $\mathcal{E}$ (занемарљиве унутрашње отпорности). Са клизача потенциометра се узима напон U_p потребан за рад потрошача P, који се понаша као омски потрошач отпорности R_p. Одредити U_p као функцију растојања x клизача потенциометра од краја 2. Укупна дужина потенциометра је L.



$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_p} = \frac{R_p + R_2}{R_2 R_p}$$

$$R_e = \frac{R_2 R_p}{R_p + R_2}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_e} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + \frac{R_2 R_p}{R_p + R_2}}$$

$$I = \frac{U_p}{R_e} \Rightarrow U_p = I R_e$$

$$U_p = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + \frac{R_2 R_p}{R_p + R_2}} \cdot \frac{R_2 R_p}{R_p + R_2} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}}{\frac{R_1(R_p + R_2) + R_2 R_p}{R_p + R_2}} \cdot \frac{R_2 R_p}{R_p + R_2}$$

$$U_p = \frac{\mathcal{E} R_2 R_p}{R_1 R_p + R_1 R_2 + R_2 R_p}$$

$$R_1 = \rho \frac{L - x}{S} \qquad R_2 = \rho \frac{x}{S}$$

$$R = \rho \frac{L}{S} \qquad \frac{R}{L} = \frac{\rho}{S} \qquad \Rightarrow R_1 = \frac{R}{L}(L-x) \qquad R_2 = \frac{R}{L}x$$

$$U_p = \frac{\mathcal{E} R_p \boxed{\frac{R}{L}} x}{\boxed{\frac{R}{L}}(L-x)R_p + \boxed{\frac{R}{L}}(L-x)\frac{R}{L}x + \boxed{\frac{R}{L}}x R_p} =$$

$$= \frac{\mathcal{E} R_p x}{(L-x)R_p + \frac{R}{L}(L-x)x + R_p x} =$$

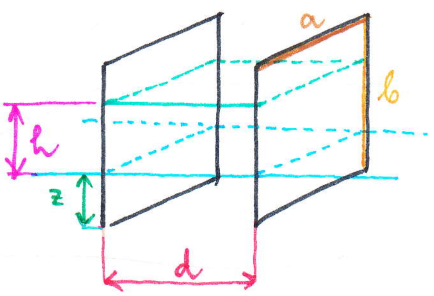
$$= \frac{\mathcal{E} R_p x}{L R_p \boxed{- x R_p} + \frac{R}{L} L x - \frac{R}{L}x^2 \boxed{+ x R_p}} =$$

$$= \frac{\mathcal{E} R_p x}{L\left(R_p + \frac{R}{L}x - \frac{R}{L^2}x^2\right)} =$$

$$\boxed{= \frac{\mathcal{E} R_p \frac{x}{L}}{R \frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right) + R_p}}$$

$$U_p = U_p\left(\frac{x}{L}\right)$$

45. У широки суд са течношћу постављен је вертикално равни кондензатор, тако да је доњи део плоча потопљен у течности. Кондензатор је укључен на извор који између плоча одржава сталну потенцијалну разлику U. Растојање између плоча кондензатора је d, густина течности ρ, а релативна диелектрична пропустљивост течности ε_r. Течност је нестишљива. На коју висину ће се подићи ниво течности између плоча кондензатора? Површински напон занемарити.



$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{z}$$

$$\delta A = dW$$

$$\int_0^h F\, dz = \int_{W_1}^{W_2} dW$$

ПРЕТПОСТАВЉАМО ДА F НЕ ЗАВИСИ ОД КООРДИНАТЕ z $(F \neq F(z))$

$$F z \Big|_0^h = W \Big|_{W_1}^{W_2}$$

$$F h = W_2 - W_1$$

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

$$W_1 = \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{a \cdot z}{d} U^2}_{\text{ДЕО У ТЕЧНОСТИ}} + \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{a(b-z)}{d} U^2}_{\text{ДЕО ВАН ТЕЧНОСТИ}}$$

$$W_2 = \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{a(z+h)}{d} U^2}_{} + \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{a(b-z-h)}{d} U^2}_{}$$

$$A = W_2 - W_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{a(z+h)}{d} U^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{a(b-z-h)}{d} U^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{a \cdot z}{d} U^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{a(b-z)}{d} U^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 U^2 \left(\boxed{\varepsilon_r \frac{az}{d}} + \varepsilon_r \frac{ah}{d} \boxed{+ \frac{ab}{d}} \boxed{- \frac{az}{d}} - \frac{ah}{d} \boxed{- \varepsilon_r \frac{az}{d}} \boxed{- \frac{ab}{d}} \boxed{+ \frac{az}{d}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 U^2 \frac{ah}{d} (\varepsilon_r - 1)$$

$$A = F \cdot h$$

$$F = mg = \rho V g$$

$$V = adh \quad \Rightarrow \quad F = \rho a d h g$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 U^2 \frac{\boxed{a}h}{d}(\varepsilon_r - 1)}_{A} = \underbrace{\rho \boxed{a} d h g}_{F}\, h$$

$$\boxed{h = \frac{\varepsilon_0 U^2 (\varepsilon_r - 1)}{2\rho d^2 g}}$$